Тема: Методы решения ЗНП при ограничениях типа неравенства

Пример №1

Дано:

$$f(X) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \text{extr}$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \ge -4$$

Аналитически отыскать экстремум функции при ограничениях типа неравенства, используя аппарат необходимых и достаточных условий.

Решение:

Преобразуем ограничения к виду: $\varphi_j(X) \le 0$

$$\underbrace{x_1 + x_2 - 4}_{\varphi_1(X)} \le 0$$
$$\underbrace{-x_1 - x_2 - 4}_{\varphi_2(X)} \le 0$$

Построим на чертеже множество допустимых решений, задаваемое ограничениями.

1. Запишем классическую функцию Лагранжа:

$$L(X,\lambda) = (x - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) + \lambda_2(-x_1 - x_2 - 4)$$

2. Запишем необходимые условия экстремума функции при ограничениях типа неравенства:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 4) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 4) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) &= 0 \\ \lambda_2(-x_1 - x_2 - 4) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3. Решим полученную систему, рассматривая все случаи:

Случай (а)

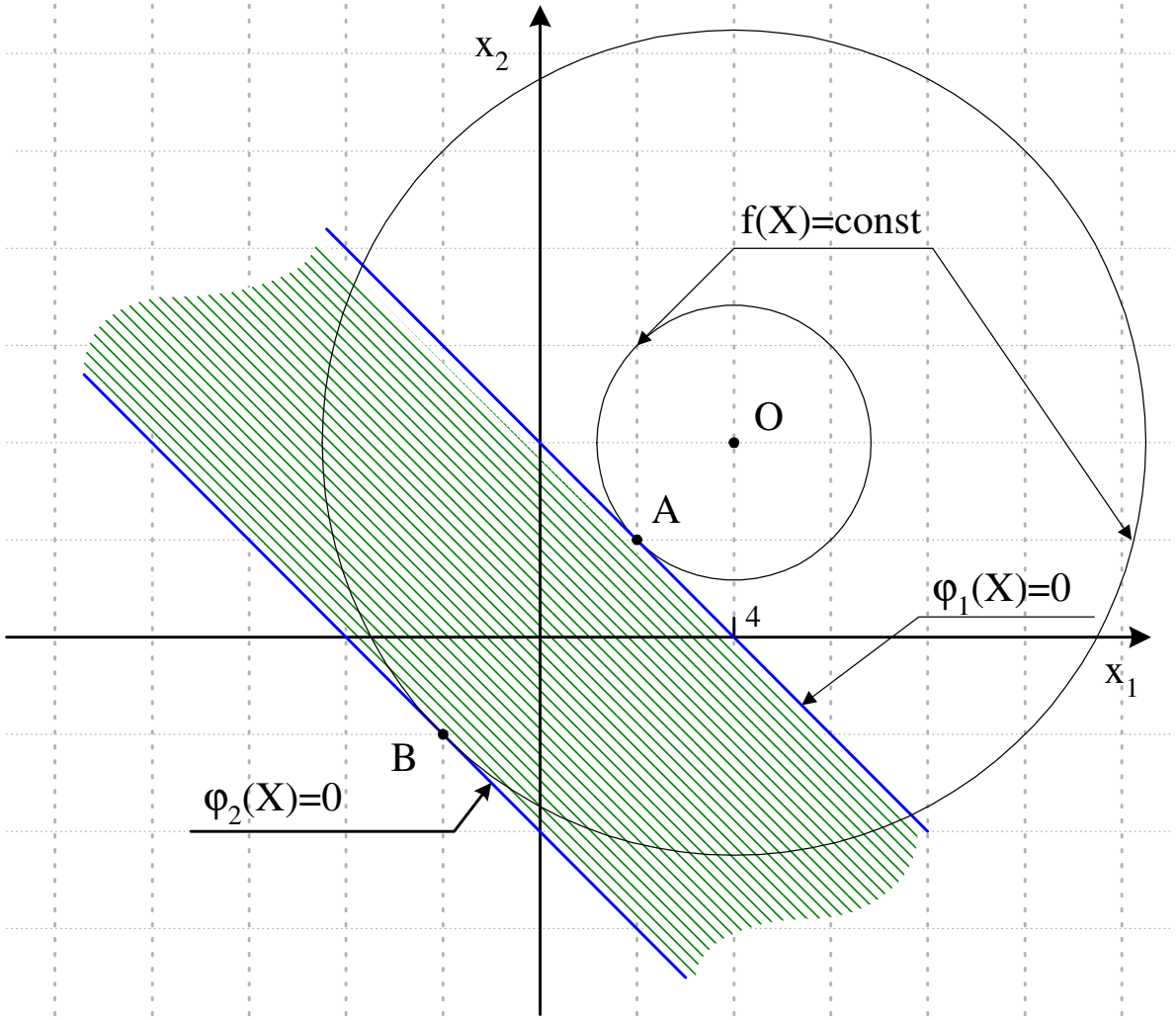
Ограничение $\varphi_1(X) = x_1 + x_2 - 4 < 0$ - пассивно, следовательно $\lambda_1 = 0$.

Ограничение $\varphi_2(X) = -x_1 - x_2 - 4 < 0$ - пассивно, следовательно $\lambda_2 = 0$.

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) = 0 \\ 2(x_2 - 4) = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (4, 4, 0, 0)$$

Т.о. получено первое решение системы – точка A с координатами $A = (4, 4, 0, 0)$. Построим эту точку на чертеже.



Случай (b)

Ограничение $\varphi_1(X) = x_1 + x_2 - 4 = 0$ - активно.

Ограничение $\varphi_2(X) = -x_1 - x_2 - 4 = 0$ - активно.

Из чертежа следует, что система решений не имеет, т.к. ограничения задаются параллельными прямыми и общих точек не имеют.

Случай (c)

Ограничение $\varphi_1(X) = x_1 + x_2 - 4 = 0$ - активно.

Ограничение $\varphi_2(X) = -x_1 - x_2 - 4 < 0$ - пассивно, следовательно $\lambda_2 = 0$.

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) + \lambda_1 = 0 \\ 2(x_2 - 4) + \lambda_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (2, 2, 4, 0)$$

Т.о. получено второе решение системы – точка B с координатами $B = (2, 2, 4, 0)$. Построим эту точку на чертеже.

Случай (d)

Ограничение $\varphi_1(X) = x_1 + x_2 - 4 < 0$ - пассивно, следовательно $\lambda_1 = 0$.

Ограничение $\varphi_2(X) = -x_1 - x_2 - 4 = 0$ - активно.

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) - \lambda_2 = 0 \\ 2(x_2 - 4) - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \\ \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (-2, -2, 0, -12)$$

Т.о. получено третье решение системы – точка C с координатами $C = (-2, -2, 0, -12)$.
Построим эту точку на чертеже.

4. Отбракуем лишние точки:

Координаты	Принадлежность МНР	Знак λ_j	Вывод
$A = (4, 4, 0, 0)$	$\notin$ МНР, **отбраковывается**	_____	_____
$B = (2, 2, 4, 0)$	$\in$ МНР	$\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 = 0$	кандидат на минимум
$C = (-2, -2, 0, -12)$	$\in$ МНР	$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 < 0$	кандидат на максимум

Исключаем точку A, поскольку она не принадлежит множеству допустимых решений, из оставшихся точек: B - кандидат на минимум, C - кандидат на максимум.

Таким образом, после отбраковки остались две точки:

$B = (2, 2, 4, 0)$ - точка является кандидатом на минимум

$C = (-2, -2, 0, -12)$ - точка является кандидатом на максимум

5. Проверим достаточные условия 1-го порядка: в точках B и C. ДУ 1-го порядка не выполняются, т.к. число активных ограничений в этих точках меньше числа переменных.

6. Проверим достаточные условия экстремума 2-го порядка

Составляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\boxed{d^2 L = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2}$$

Составляем дифференциалы ограничений:

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d\varphi_1(X) = dx_1 + dx_2}$

$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = -1 \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d\varphi_2(X) = -dx_1 - dx_2}$

Точка $B = (2, 2, 4, 0)$ - кандидат на минимум, активно ограничение φ_1, $\lambda_1 = 4 \neq 0$.

Имеем $d^2L(B) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_1(B) = dx_1 + dx_2 = 0$, получим $d^2L(B) = 4(dx_2)^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, следовательно, точка B – **условный локальный минимум**.

Точка $C = (-2, -2, 0, -12)$ - кандидат на максимум, активно ограничение φ_2, $\lambda_2 = -12 \neq 0$.

Имеем $d^2L(C) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_2(C) = -dx_1 - dx_2 = 0$, получим $d^2L(C) = 4(dx_2)^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, но точка кандидат на максимум – в C **экстремума нет**.

Ответ: получена точка $B = (2, 2)$ - условный локальный минимум.

Пример №2

Дано:

$$f(X) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2 \to \text{extr}$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1^2 - x_2 \le 2$$

Аналитически отыскать экстремум функции при ограничениях типа неравенства, используя аппарат необходимых и достаточных условий.

Решение:

Преобразуем ограничения к виду: $\varphi_j(X) \le 0$

$$x_1 + x_2 \le 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 - 4 \le 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(X) = x_1 + x_2 - 4$$
$$x_1^2 - x_2 \le 2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 - x_2 - 2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2(X) = x_1^2 - x_2 - 2$$

Построим на чертеже множество допустимых решений, задаваемое ограничениями.

1. Запишем классическую функцию Лагранжа:

$$L(X,\lambda) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) + \lambda_2(x_1^2 - x_2 - 2)$$

2. Запишем необходимые условия экстремума функции при ограничениях типа неравенства:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 6) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) &= 0 \\ \lambda_2(x_1^2 - x_2 - 2) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3. Решим полученную систему, рассматривая все случаи:

Случай (а)

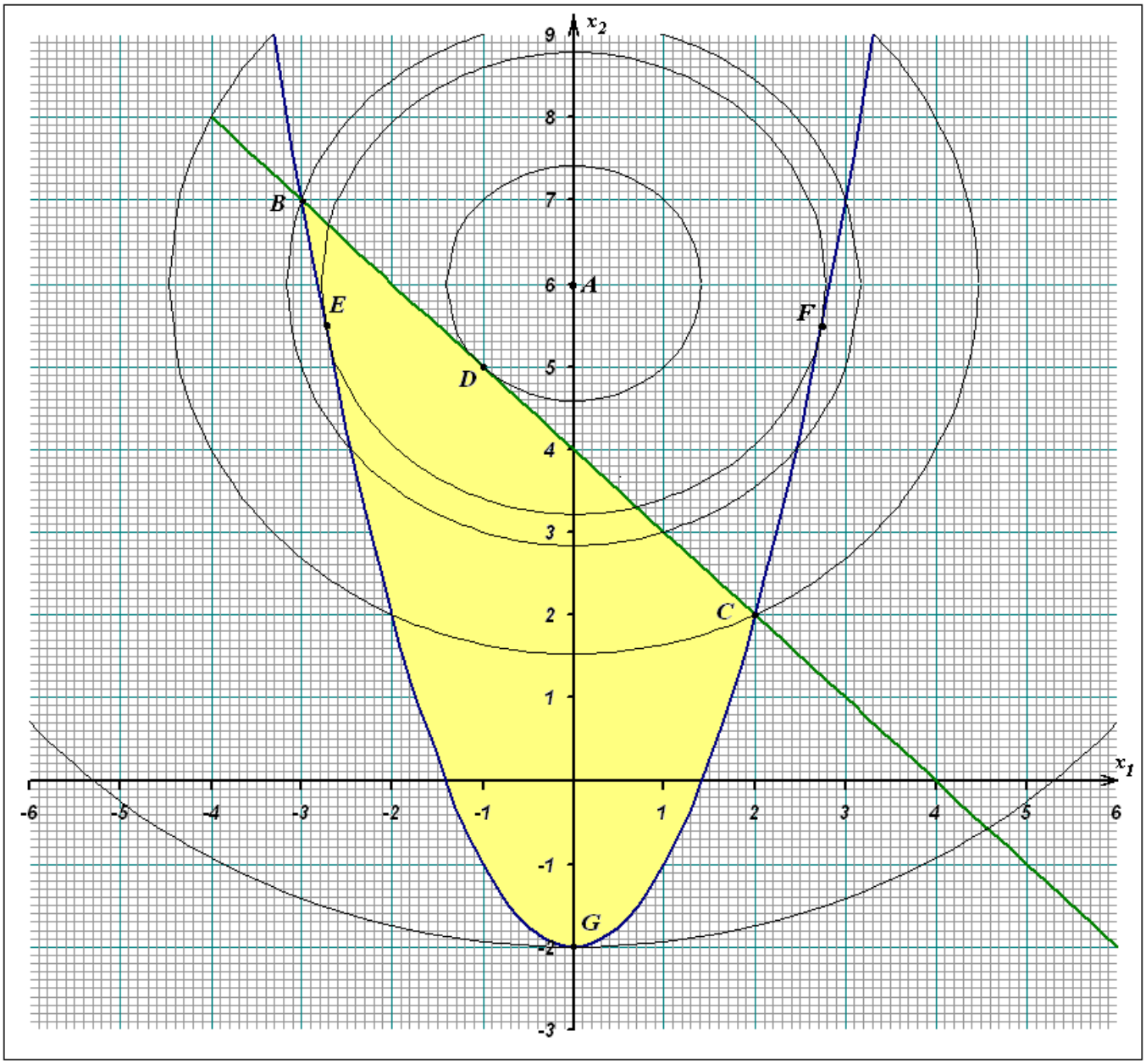
Ограничение $\varphi_1(X) = x_1 + x_2 - 4 < 0$ - пассивно, следовательно $\lambda_1 = 0$.

Ограничение $\varphi_2(X) = x_1^2 - x_2 - 2 < 0$ - пассивно, следовательно $\lambda_2 = 0$.

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2(x_2 - 6) = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Т.о. получено первое решение системы – точка A с координатами $A = (0, 6, 0, 0)$. Построим эту точку на чертеже.



Случай (b)

Ограничение $\varphi_1(X) = x_1 + x_2 - 4 = 0$ - активно.

Ограничение $\varphi_2(X) = x_1^2 - x_2 - 2 = 0$ - активно.

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ 2(x_2 - 6) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ x_1^2 - x_2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ 2(x_2 - 6) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x_2 = -x_1 + 4 \\ x_1^2 - (-x_1 + 4) - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ 2(x_2 - 6) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x_2 = -x_1 + 4 \\ x_1^2 + x_1 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2 x_1=0 \\ 2(x_2-6)+\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x_2=-x_1+4 \\ x_1=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2 x_1=0 \\ 2(x_2-6)+\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x_2=7 \\ x_1=-3 \end{cases} \begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2 x_1=0 \\ 2(x_2-6)+\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x_2=2 \\ x_1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6+\lambda_1-6\lambda_2=0 \\ 2+\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x_2=7 \\ x_1=-3 \end{cases} \begin{cases} 4+\lambda_1+4\lambda_2=0 \\ -8+\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x_2=2 \\ x_1=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=7 \\ \lambda_1=-3.6 \\ \lambda_2=-1.6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=2 \\ \lambda_1=5.6 \\ \lambda_2=-2.4 \end{cases}}$$

Т.о. получено второе и третье решение системы – точки B, C с координатами соответственно:
$B=(-3,7,-3.6,-1.6)$, $C=(2,2,5.6,-2.4)$.
Построим эти точки на чертеже.

Случай (c)
Ограничение $\varphi_1(X)=x_1+x_2-4=0$ - активно.
Ограничение $\varphi_2(X)=x_1^2-x_2-2<0$ - пассивно, следовательно $\lambda_2=0$.

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda_1=0 \\ 2(x_2-6)+\lambda_1=0 \\ x_1+x_2-4=0 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-2x_1 \\ 2(x_2-6)-2x_1=0 \\ x_1+x_2-4=0 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-2x_1 \\ x_2-x_1=6 \\ x_1+x_2=4 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=5 \\ \lambda_1=2 \\ \lambda_2=0 \end{cases}$$

Т.о. получено четвертое решение системы – точка D с координатами $D=(-1,5,2,0)$. Построим эту точку на чертеже.

Случай (d)
Ограничение $\varphi_1(X)=x_1+x_2-4<0$ - пассивно, следовательно $\lambda_1=0$.
Ограничение $\varphi_2(X)=x_1^2-x_2-2=0$ - активно.
Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+2\lambda_2 x_1=0 \\ 2(x_2-6)-\lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ x_1^2-x_2-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1(1+\lambda_2)=0 \\ 2(x_2-6)-\lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ x_1^2-x_2-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2=-1 \\ 2x_2=11 \\ \lambda_1=0 \\ x_1^2-x_2-2=0 \end{cases} \begin{cases} x_1=0 \\ 2x_2-\lambda_2=12 \\ \lambda_1=0 \\ x_2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\pm\sqrt{15/2} \\ x_2=11/2 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=-1 \end{cases} \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-2 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=-16 \end{cases}$$

Т.о. получено пятое, шестое и седьмое решение системы – точки E, F, G с координатами соответственно:

$E = (-\sqrt{15/2}, 11/2, 0, -1)$, $F = (\sqrt{15/2}, 11/2, 0, -1)$, $G = (0, -2, 0, -16)$.

Построим эти точки на чертеже.

4. Отбракуем лишние точки:

Точка	**Проверка точек на принадлежность МДР:** $\varphi_1(X) \le 0$ **и** $\varphi_2(X) \le 0$		**Проверка условий на знак** λ_j	
	Условия	**Вывод**	**Условия**	**Вывод**
$A = (0, 6, 0, 0)$	$\varphi_1(A) = 2 > 0$ $\varphi_2(A) = -8 < 0$	точка не принадлежит МДР и **отбраковывается**	_____	_____
$B = (-3, 7, -3.6, -1.6)$	$\varphi_1(B) = 0$ $\varphi_2(B) = 0$	точка принадлежит МДР	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	точка является кандидатом на максимум
$C = (2, 2, 5.6, -2.4)$	$\varphi_1(C) = 0$ $\varphi_2(C) = 0$	точка принадлежит МДР	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	Множители Лагранжа разных знаков, точка **отбраковывается**
$D = (-1, 5, 2, 0)$	$\varphi_1(D) = 0$ $\varphi_2(D) = -6 < 0$	точка принадлежит МДР	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 = 0$	точка является кандидатом на минимум
$E = (-\sqrt{15/2}, 11/2, 0, -1)$	$\varphi_1(E) = -1.239 < 0$ $\varphi_2(E) = 0$	точка принадлежит МДР	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 < 0$	точка является кандидатом на максимум
$F = (\sqrt{15/2}, 11/2, 0, -1)$	$\varphi_1(F) = 4.239 > 0$ $\varphi_2(F) = 0$	точка не принадлежит МДР и **отбраковывается**	_____	_____
$G = (0, -2, 0, -16)$	$\varphi_1(G) = -6 < 0$ $\varphi_2(G) = 0$	точка принадлежит МДР	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 < 0$	точка является кандидатом на максимум

Таким образом, после отбраковки остались четыре точки:

$B = (-3, 7, -3.6, -1.6)$ - точка является кандидатом на максимум

$D = (-1, 5, 2, 0)$ - точка является кандидатом на минимум

$E = (-\sqrt{15/2}, 11/2, 0, -1)$ - точка является кандидатом на максимум

$G = (0, -2, 0, -16)$ - точка является кандидатом на максимум

5. Поверим достаточные условия 1-го порядка в каждой из полученных точек:

Точка	**Активные ограничения**		**Знак λ_j**	**Вывод**
$B = (-3, 7, -3.6, -1.6)$	$\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = 0$	число активных ограничений равно числу переменных –	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	достаточные условия первого порядка выполнены – точка условный локальный максимум
$D = (-1, 5, 2, 0)$	$\varphi_1 = 0$	число активных ограничений меньше числа переменных – достаточные условия первого порядка не выполнены	_____	необходима проверка достаточных условий второго порядка
$E = (-\sqrt{15/2}, 11/2, 0, -1)$	$\varphi_2 = 0$	число активных ограничений меньше числа переменных – достаточные условия первого порядка не выполнены	_____	необходима проверка достаточных условий второго порядка
$G = (0, -2, 0, -16)$	$\varphi_2 = 0$	число активных ограничений меньше числа переменных – достаточные условия первого порядка не выполнены	_____	необходима проверка достаточных условий второго порядка

Таким образом, получено: точка $B = (-3, 7, -3.6, -1.6)$ – условный локальный максимум функции.

6. Для оставшихся точек проверим достаточные условия экстремума второго порядка.
Запишем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2 + 2\lambda_2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\boxed{d^2 L = (2 + 2\lambda_2)(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2}$$

Запишем дифференциал ограничения φ_1:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d\varphi_1(X) = 1 \cdot dx_1 + 1 \cdot dx_2}$$

Запишем дифференциал ограничения φ_2:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = 2x_1 \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d\varphi_2(X) = 2x_1 \cdot dx_1 - 1 \cdot dx_2}$$

Исследуем точку $\underline{D = (-1, 5, 2, 0)}$ - кандидат на минимум, активным в ней является ограничение φ_1, при этом $\lambda_1 = 2 \neq 0$.

Имеем $d^2L(D) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_1(D) = 1 \cdot dx_1 + 1 \cdot dx_2 = 0$, получим $dx_1 = -dx_2 \Rightarrow d^2L(D) = 4(dx_2)^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, следовательно, точка $D = (-1, 5, 2, 0)$ – **условный локальный минимум**.

Исследуем точку $E = (-\sqrt{15/2}, 11/2, 0, -1)$ - кандидат на максимум, активным в ней является ограничение φ_2, при этом $\lambda_2 = -1 \neq 0$.

Имеем $d^2L(E) = 2(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_2(E) = -2\sqrt{15/2} \cdot dx_1 - 1 \cdot dx_2 = 0$, получим $dx_2 = -2\sqrt{15/2}\,dx_1 \Rightarrow d^2L(E) = 60(dx_1)^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$, но точка кандидат на максимум – в E **экстремума нет**.

Исследуем точку $G = (0, -2, 0, -16)$ - кандидат на максимум, активным в ней является ограничение φ_2, при этом $\lambda_2 = -16 \neq 0$.

Имеем $d^2L(G) = -30(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_2(G) = -1 \cdot dx_2 = 0$, получим $dx_2 = 0 \Rightarrow d^2L(G) = -30(dx_1)^2 < 0$ при $dx_1 \neq 0$, следовательно, точка $G = (0, -2, 0, -16)$ **условный локальный максимум**.

Ответ: получены точки

$B = (-3, 7)$	- условный локальный максимум
$D = (-1, 5)$	- условный локальный минимум
$G = (0, -2)$	- условный локальный максимум