Тема: Методы решения задачи линейного программирования

Пример №1

Дано:

$$f(X) = 4x_1 + x_2 \to \text{extr}$$

$$-x_1 + x_2 \le 1 \qquad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \ge 4 \qquad (2)$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad (3)$$

Решить задачу графически и симплекс методом.

Решение:

а) Решим задачу графически.

1. Для графического решения задачи построим множество допустимых решений, задаваемое ограничениями (1)-(3).
Ограничение (1) в задаче определяется прямой $-x_1 + x_2 = 1$, проходящей через точки:

x_1	x_2
0	1
–1	0

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и будет содержать точку $(0, 0)^T$, так как при подстановке координат этой точки в ограничение (1) получается верное неравенство: $-0 + 0 \le 1$.

Ограничение (2) в задаче определяется прямой $2x_1 + x_2 = 4$, проходящей через точки:

x_1	x_2
0	4
2	0

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и **НЕ** будет содержать точку $(0, 0)^T$, так как при подстановке координат этой точки в ограничение (2) получается неверное неравенство: $2 \cdot 0 + 0 \ge 4$.

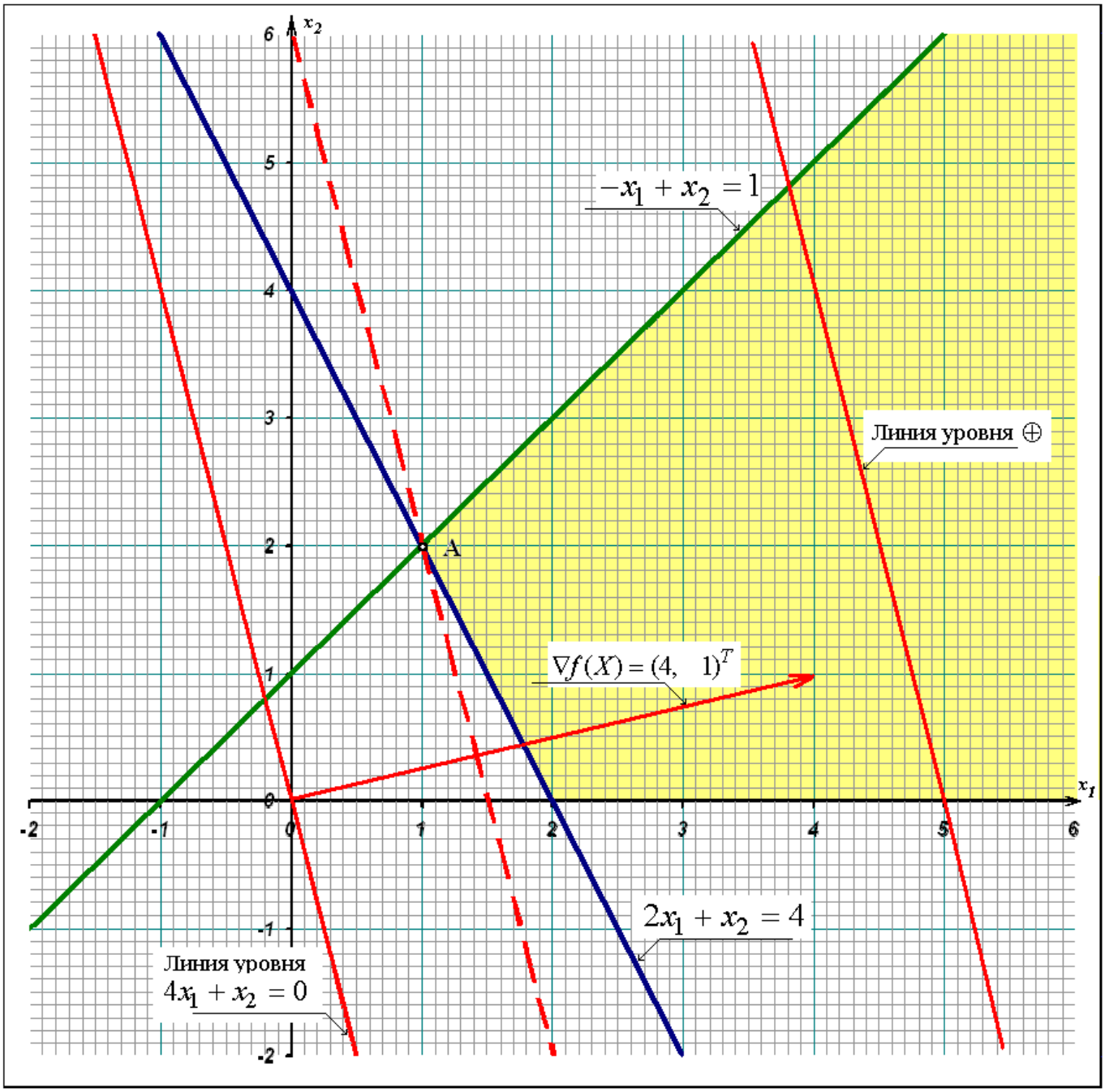
Ограничения (3) в задаче задают 1-ю четверть координатной плоскости.

Множество допустимых решений включает все точки, в которых ограничения выполняются одновременно. Отметим крайние точки получившегося множества: **A, B**.

2. Построим градиент функции $\nabla f(X) = (4, 1)^T$ в точке $(0, 0)^T$.

3. Построим линию уровня функции $f(X) = C$, проходящую через точку $(0, 0)^T$. Для этого найдем значение константы C, подставив координаты точки в целевую функцию: $C = 4 \cdot 0 + 0 = 0$, и затем построим прямую $4x_1 + x_2 = 0$. Заметим, что построенная прямая перпендикулярна градиенту .

Построенная линия уровня не имеет общих точек с множеством допустимых решений. Используя параллельный перенос, построим еще одну линию уровня функции, пересекающую множество допустимых решений, и отметим ее $\oplus$.



4. Будем искать точку максимума функции как последнюю точку касания линии уровня и множества допустимых решений при параллельном переносе линии $\oplus$ в направлении градиента функции. Как видно из чертежа, такой точки не существует, так как множество допустимых решений в направлении градиента неограниченное, следовательно, максимума в задаче нет.

Будем искать точку минимума функции как последнюю точку касания линии уровня и множества допустимых решений при параллельном переносе линии $\oplus$ в направлении, противоположном градиенту функции. Как видно из чертежа, это точка $A = (1,\ \ 2)^T$ (соответствующая линия уровня изображена штриховой линией). Таким образом, получено решение задачи поиска минимума функции:

$x_1^* = 1,$

$x_2^* = 2$

$f(X_{min}^*) = 4 \cdot 1 + 2 = 6.$

б) Решим задачу симплекс-методом.

Найдем максимум функции. Будем рассматривать задачу:

$$\begin{aligned} f(X) = 4x_1 + x_2 &\to \max \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ 2x_1 + x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Подготовим задачу к решению симплекс-методом:
Перейдем от задачи в основной постановке к задаче в канонической:

$$\begin{aligned} f(X) = 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 &\to \max \\ -x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 - 1x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

x_3, x_4 - дополнительные переменные в задаче

Выпишем столбцы при переменных в ограничениях:

x_1	x_2	x_3	x_4
$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Базис в задаче отсутствует, т.к. среди выписанных столбцов нет достаточного количества базисных (столбцов единичной матрицы (2 x 2)).
Переходим к М-задаче. Введем во второе ограничение искусственную переменную $x_5 \ge 0$, тогда получим новую систему ограничений:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 1x_5 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

Выпишем столбцы при переменных в ограничениях:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Столбцы при переменных x_3 и x_5 образуют единичную матрицу (2 x 2), следовательно, найден начальный базис в задаче.

Введем искусственную переменную x_5 в функцию, получим:

$$f(X) = 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 \to \max$$

Окончательно получаем задачу, подготовленную к решению симплекс-методом:

$$\begin{aligned} f(X) &= 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 \to \max \\ -x_1 &+ x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1 \\ 2x_1 &+ x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 1x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Базисные переменные в задаче: в 1-м ограничении - x_3,

во 2-м ограничении- x_5

Начальное базисное решение:

$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 1$ $x_4 = 0$ $x_5 = 4$

Таблица №1

			4	1	0	0	-M	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r_i
0	x_3	1	-1	1	1	0	0	-1
-M	x_5	4	2	1	0	-1	1	2
		Δ	2M+4	M+1	0	-M	0	

⊕ -строка

⊕ -столбец

Коэффициент пересчёта

Разрешающий элемент

Базисное решение, соответствующее таблице №1:

$x_3 = 1$ $x_1 = 0$

$x_5 = 4$ $x_2 = 0$

$x_4 = 0$

В исходных переменных x_1, x_2 это решение соответствует точке с координатами $(0,\ 0)$.

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = 4 - \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 - (0 - 2M) = 2M + 4$$

$$\Delta_2 = 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - (0 - M) = M + 1$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 - (0 + M) = -M$$

Т.к. $\Delta_1 = \max(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4)$ и $\Delta_1 > 0$, то в базис вводится переменная x_1, соответствующий этой переменной столбец – $\oplus$-столбец.

Вычислим величины r_i, как отношения элементов столбца Бр к элементам $\oplus$-столбца:

$$r_1 = \frac{1}{-1} = -1 \qquad r_2 = \frac{4}{2} = 2$$

Из базиса выводится переменная x_5, т.к. ей соответствует минимальная неотрицательная величина r_2, соответствующая ей строка – $\oplus$-строка.

На пересечении $\oplus$-столбца и $\oplus$-строки, находится разрешающий элемент $R = 2$.

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №2;
- запишем в новую таблицу №2 новые базисные переменные x_3 и x_1;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №2
- пересчитаем $\oplus$-строку: разделим $\oplus$-строку на разрешающий элемент, результат запишем во 2-ю строку таблицы №2 – получится **N-строка**;

$\oplus$-строка	(	4	2	1	0	-1	1) / 2
Результат		2	1	1/2	0	-1/2	1/2

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим N-строку на 1-й элемент $\oplus$-столбца – это (-1), и вычтем из 1-й строки таблицы №1, результат запишем в 1-ю строку таблицы №2:

Строка 1 таблицы №1	1	-1	1	1	0	0
N * (-1)	-2	-1	-1/2	0	1/2	-1/2
Результат	3	0	3/2	1	-1/2	1/2

Таблица №2

			4	1	0	0	-M	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r_i
0	x_3	3	0	3/2	1	-1/2	1/2	-6
4	x_1	2	1	1/2	0	-1/2	1/2	-4
		Δ	0	-1	0	2	-M-2	

$\oplus$-столбец

Базисное решение, соответствующее таблице №2:

$$x_3 = 3 \qquad x_2 = 0$$
$$x_1 = 2 \qquad x_4 = 0$$
$$x_5 = 0$$

В исходных переменных x_1, x_2 это решение соответствует точке с координатами $(3,\ 0)$.

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_2 = 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 1 - (0 + 2) = -1$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\end{pmatrix} = 0 - (0-2) = 2$$

$$\Delta_5 = -M - \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} = -M - (0+2) = -M - 2$$

Т.к. $\Delta_4 = \max(\Delta_2, \Delta_4, \Delta_5)$ и $\Delta_4 > 0$, то в базис вводится переменная x_4, соответствующий этой переменной столбец – $\oplus$-столбец.

Т.к. $\oplus$-столбец содержит только неположительные элементы, то из базиса нечего вывести, и, следовательно, у задачи нет решения вследствие неограниченности множества допустимых решений в направлении градиента.

Найдем минимум функции. Будем рассматривать задачу:

$$\begin{aligned} f(X) = 4x_1 + x_2 &\to \min \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ 2x_1 + x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Перейдем к задаче поиска максимума, для этого умножим функцию на (-1), получим:

$$\begin{aligned} f(X) = -4x_1 - x_2 &\to \max \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ 2x_1 + x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Т.к. данная задача отличается от решенной только коэффициентами функции, воспользуемся результатами подготовки задачи для поиска максимума исходной функции, получим:

$$\begin{aligned} f(X) = -4x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 &\to \max \\ -x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 1x_5 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

Базисные переменные в задаче: в 1-м ограничении - x_3,

во 2-м ограничении- x_5

Начальное базисное решение:

$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 1$ $x_4 = 0$ $x_5 = 4$

Таблица №1

			-4	-1	0	0	-M	C_j	
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r_i	
0	x_3	1	-1	1	1	0	0	-1	
-M	x_5	4	2	1	0	-1	1	2	$\oplus$-строка
		Δ	2M-4	M-1	0	-M	0		

$\oplus$-столбец

Базисное решение, соответствующее таблице №1:

$x_3 = 1$ $\quad$ $x_1 = 0$

$x_5 = 4$ $\quad$ $x_2 = 0$

$x_4 = 0$

В исходных переменных x_1, x_2 это решение соответствует точке с координатами $(0,\ 0)$.

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = -4 - \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 - (0 - 2M) = 2M - 4$$

$$\Delta_2 = -1 - \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 - (0 - M) = M - 1$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 - (0 + M) = -M$$

Т.к. $\Delta_1 = \max(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4)$ и $\Delta_1 > 0$, то в базис вводится переменная x_1, соответствующий этой переменной столбец – $\oplus$-столбец.

Вычислим величины r_i, как отношения элементов столбца Бр к элементам $\oplus$-столбца:

$$r_1 = \frac{1}{-1} = -1 \qquad r_2 = \frac{4}{2} = 2$$

Из базиса выводится переменная x_5, т.к. ей соответствует минимальная неотрицательная величина r_2, соответствующая ей строка – $\oplus$-строка.

На пересечении $\oplus$-столбца и $\oplus$-строки, находится разрешающий элемент $R = 2$.

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №2;
- запишем в новую таблицу №2 новые базисные переменные x_3 и x_1;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №2
- пересчитаем $\oplus$-строку: разделим $\oplus$-строку на разрешающий элемент, результат запишем во 2-ю строку таблицы №2 – получится **N-строка**;

$\oplus$-строка	(	4	2	1	0	-1	1) / 2
Результат		2	1	1/2	0	-1/2	1/2

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на 1-й элемент $\oplus$-столбца – это (-1), и вычтем из 1-й строки таблицы №1, результат запишем в 1-ю строку таблицы №2:

Строка 1 таблицы №1	1	-1	1	1	0	0
N * (-1)	-2	-1	-1/2	0	1/2	-1/2
Результат	3	0	3/2	1	-1/2	1/2

Таблица №2

			-4	-1	0	0	-M	C_j	
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r_i	
0	x_3	3	0	3/2	1	-1/2	1/2	2	⊕-строка
-4	x_1	2	1	1/2	0	-1/2	1/2	4	
		Δ	0	1	0	-2	-M+2		

⊕-столбец

Базисное решение, соответствующее таблице №2:

$x_3 = 3$ $\quad$ $x_2 = 0$

$x_1 = 2$ $\quad$ $x_4 = 0$

$x_5 = 0$

В исходных переменных x_1, x_2 это решение соответствует точке с координатами $(3,\ 0)$.

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_2 = -1 - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -1 - (0 - 2) = 1$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = 0 - (0 + 2) = -2$$

$$\Delta_5 = -M - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -M - (0 - 2) = -M + 2$$

Т.к. $\Delta_2 = \max(\Delta_2, \Delta_4, \Delta_5)$ и $\Delta_2 > 0$, то в базис вводится переменная x_2, соответствующий этой переменной столбец – ⊕-столбец.

Вычислим величины r_i, как отношения элементов столбца Бр к элементам ⊕-столбца:

$$r_1 = \frac{3}{3/2} = 2 \qquad r_2 = \frac{2}{1/2} = 4$$

Из базиса выводится переменная x_3, т.к. ей соответствует минимальная неотрицательная величина r_1, соответствующая ей строка – ⊕-строка.

На пересечении ⊕-столбца и ⊕-строки, находится разрешающий элемент $R = 3/2$.

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №3;
- запишем в новую таблицу №3 новые базисные переменные x_2 и x_1;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №3
- пересчитаем ⊕-строку: разделим ⊕-строку на разрешающий элемент, результат запишем в 1-ю строку таблицы №3 – получится **N-строка**;

⊕-строка	(	3	0	3/2	1	-1/2	1/2) / (3/2)
Результат		2	0	1	2/3	-1/3	1/3

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на 2-й элемент ⊕-столбца – это (1/2), и вычтем из 2-й строки таблицы №2, результат запишем во 2-ю строку таблицы №3:

Строка 2 таблицы №2	2	1	1/2	0	-1/2	1/2
Разрешающая строка * (1/2)	1	0	1/2	1/3	-1/6	1/6
Результат	1	1	0	-1/3	-1/3	1/3

Таблица №3

			-4	-1	0	0	-M	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r_i
-1	x_2	2	0	1	2/3	-1/3	1/3	-6
-4	x_1	1	1	0	-1/3	-1/3	1/3	-4
		Δ	0	0	-2/3	-5/3	-	

Базисное решение, соответствующее таблице №3:

$x_2 = 2$ $\quad$ $x_3 = 0$

$x_1 = 1$ $\quad$ $x_4 = 0$

$x_5 = 0$

В исходных переменных x_1, x_2 это решение соответствует точке с координатами $(1,\ 2)$.

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_3 = 0 - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = 0 - (-2/3 + 4/3) = -2/3$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = 0 - (1/3 + 4/3) = -5/3$$

$$\Delta_5 = -M - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = -M - (-1/3 - 4/3) = -M + 5/3$$

Т.к. все симплекс-разности в таблице №3 неположительны, то критерий окончания выполнен.

Проанализируем полученное базисное решение. В состав базисных переменных таблицы №3 не входят искусственные переменные, значит, получено решение задачи:

$x_1^* = 1$

$x_2^* = 2$

$x_3^* = 0$

$x_4^* = 0$

$x_5^* = 0$.

Это решение единственное, так как строка симплекс-разностей таблицы №3 содержит два (по числу ограничений задачи) нулевых значения.

Решение исходной задачи получается отбрасыванием дополнительных и искусственных переменных. Ему соответствует точка $A = (1,\ 2)$.

Ответ:

Функция не имеет максимума.

Функция имеет минимум в точке A с координатами:

$x_1^* = 1$,

$x_2^* = 2$.

$f(X^*_{min}) = 4 \cdot 1 + 2 = 6$.