ПРЕДЕЛЫ

При вычислении пределов последовательностей x_n рассматривают $n \to \infty$.

При вычислении пределов функций и последовательностей используются следующие правила и приемы.

1) Если f(x) – элементарная функция и $a \in D(f)$**, то** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$**.**

К **элементарным функциям** относят основные элементарные функции; функции, полученные при помощи арифметических действий над основными элементарными, и сложные функции, полученные наложением элементарных функций.

2) **Правила предельных переходов при выполнении арифметических операций и вычислении предела сложной функции**.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x); \qquad \lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x);$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x); \qquad \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

Исключения составляют неопределенные выражения вида: $\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}.$

Предел сложной функции: $\lim\limits_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right) = A$, если существуют $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x) = A$.

В частности: $\lim\limits_{x\to a}\left(u(x)\right)^{v(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a}\left(u(x)\right)\right)^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}$. Исключения составляют неопределенные выражения вида: $1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$.

3) **Тождественные преобразования** алгебраических и тригонометрических выражений.

$$a\cdot b=\frac{a}{\left(\frac{1}{b}\right)}=\frac{b}{\left(\frac{1}{a}\right)};\ \frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c};\ \frac{a}{b}=\frac{a/c}{b/c}. \qquad a^n-b^n=(a-b)\underbrace{\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1}\right)}_{n}$$

$$a^n+b^n=(a+b)\underbrace{\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+b^{n-1}\right)}_{n},\ n=2k-1,\ k\in\aleph$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}; \qquad \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}.$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\ \text{если } x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ D=b^2-4ac,\ D\ge 0.$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x; \qquad 1-\cos 2x=2\sin^2 x;$$

$$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}; \qquad \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}.$$

4) Замена переменной.

5) Замечательные пределы и следствия из них:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

6) Применение эквивалентных функций

Если при $x\to a\ \ \alpha(x)\to 0$, то $\alpha\approx\sin\alpha\approx tg\alpha\approx\arcsin\alpha\approx arctg\alpha\approx\ln(1+\alpha)\approx\left(e^{\alpha}-1\right)$.

Если при $x\to a\ \ \alpha(x)\to 0$, то $\frac{\alpha^2}{2}\approx(1-\cos\alpha)$.

При $x\to\infty \qquad \left(b_0x^k+b_1x^{k-1}+b_2x^{k-2}+\ldots.+b_k\right)\approx b_0x^k$

Правило. ***При вычислении предела произведения или частного функций эквивалентные функции можно заменять друг на друга.***

ПРОИЗВОДНАЯ

Функция задана явно уравнением $y = f(x)$

Производная $\frac{dy}{dx}$ вычисляется при помощи:

1) общих правил дифференцирования

$1)(u \pm v)' = u' \pm v'$

$2)(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'';$

$3)\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

2) правила дифференцирования сложной функции: $(f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x),$

При вычислении производной используется таблица производных.

При вычислении производной а) сложно-степенной функции $(u(x))^{v(x)}$, б) громоздкого произведения, в) громоздкого частного применяется логарифмическая производная: $y' = y \cdot (\ln y)'$.

Функция задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$

Производная $\frac{dy}{dx}$ вычисляется при помощи формулы :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'}.$$

Уравнение касательной и уравнение нормали к кривой Г в точке (x_0; y_0)

Если кривая Г задана явным уравнением y=f(x), то уравнение касательной (к)-

$y = y_o + y_o' \cdot (x - x_o),$

$где \quad y_o = f(x_o), \quad y_o' = f'(x_o).$

уравнение нормали (н)-

$y = y_o - \frac{1}{y_o'} \cdot (x - x_o).$

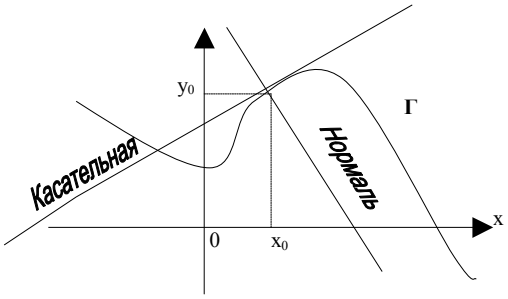
Частные случаи

1)Если $y_0' = 0,$ то

(к): $y=y_o$, (н): $x=x_o$.

2)Если $y_0' = \infty,$ то

(к): $x=x_o$, (н): $y=y_o$.



Угол ω между кривыми y=f(x) и y=g(x) в точке их пересечения x_0 вычисляется по формуле

$$tg\varpi = \left|\frac{f'(x_o) - g'(x_o)}{1 + f'(x_o) \cdot g'(xo)}\right|.$$

$y_0' = tg(\alpha) = k_{касательной}$

Если кривая Г задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, то уравнение касательной -

$y = y_o + y_o' \cdot (x - x_o),$

$где \quad x_o = \varphi(t_0), y_o = \psi(t_o),$

$y_o' = \frac{\psi'(t_o)}{\varphi'(t_0)}.$

уравнение нормали -

$y = y_o - \frac{1}{y_o'} \cdot (x - x_o).$

Частные случаи

1)Если $\psi'(t_o) = 0,$ то

(к): $y=y_o$, (н): $x=x_o$.

2)Если $\varphi'(t_o) = 0,$ то

к): $x=x_o$, (н): $y=y_o$

Правила Лопиталя-Бернулли $\left(\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

В случае неопределенности вида $(0 \cdot \infty)$ произведение преобразуется в частное: $u \cdot v = \left[\begin{array}{l} \frac{u}{\left(\frac{1}{v}\right)}, \\ \frac{v}{\left(\frac{1}{u}\right)}. \end{array}\right.$

В случае неопределенности вида $(\infty - \infty)$ разность преобразуется в частное: $u - v = u(1 - \frac{v}{u}) = \frac{(1 - \frac{v}{u})}{\frac{1}{u}}$.

В случае неопределенностей вида $1^{\infty}, 0^0, \quad \infty^0$ сложно-степенная функция преобразуется следующим образом: $(u)^v = \left(e^{\ln u}\right)^v = e^{\ln u \cdot v}$.

Схема исследования функции и построения графика

I. Элементарное исследование функции:

1) Найти область определения функции $D(y)$.

2) Исследовать на четность, нечетность.

Если область определения является множеством, не симметричным относительно точки отсчета $x=0$, то заданная функция является функцией общего вида, и ее график не обладает симметрией ни относительно оси Oy, ни относительно начала координат O(0,0).

Если для любого значения x $f(-x)= -f(x)$, то функция называется нечетной, и ее график симметричен относительно начала координат (радиальная симметрия).

Если для любого значения x $f(-x)=f(x)$, то функция называется четной, и ее график симметричен относительно оси ординат Oy (осевая симметрия).

3) Исследовать на периодичность.

Число $T \neq 0$ называется периодом функции $f(x)$, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$. Наименьший положительный период называется основным периодом функции. Для построения графика периодической функции достаточно выполнить исследование функции на отрезке, имеющем длину, равную периоду, построить график на этом отрезке (например, взять отрезок [- T/2; T/2]), и потом график периодически продолжить на всю область определения.

4)Найти точки пересечения графика с координатными осями.

5) Найти и определить тип точек разрыва.

6) Найти пределы функции на границах области определения.

Если хотя бы один односторонний предел $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \infty$, то вертикальная прямая $x= a$ является вертикальной асимптотой .

Если $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = B$, то горизонтальная прямая $y=B$ является левой асимптотой графика функции. (Искать левую наклонную асимптоту не надо в пункте II.2)

Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, то горизонтальная прямая $y=A$ является правой асимптотой графика функции. (Искать правую наклонную асимптоту не надо в пункте II.3)

II. Нахождение асимптот.

1) Прямая $x = a$ - вертикальная асимптота, если хотя бы один односторонний предел при $x \to a$ равен бесконечности: $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \infty$.

2) Прямая $y= k_л x+b_л$ – левая наклонная асимптота, если существуют конечные пределы:

$$k_л = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b_л = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - k_л x \right).$$

3) Прямая $y= k_n x+b_n$ – правая наклонная асимптота, если существуют конечные пределы

$$k_n = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b_n = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k_n x \right).$$

III**. Исследование функции при помощи первой производной:**

1) Найти рациональным способом y'.

2) Найти критические точки функции $f(x)$ из условий: $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

3) Методом интервалов найти интервалы монотонности и точки экстремума.

Если производная $y' > 0$ на промежутке, то функция возрастает на этом промежутке.

Если производная $y' < 0$ на промежутке, то функция убывает на этом промежутке.

Если при переходе через точку x_0, принадлежащую области определения, производная меняет знак, то эта точка является точкой экстремума.

IV**. Исследование функции при помощи второй производной:**

1) Найти y''.

2) Найти критические точки производной функции $f(x)$ из условий: $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует.

3) Методом интервалов найти интервалы выпуклости и точки перегиба.

Если вторая производная $y'' > 0$ на промежутке, то график функция обращен выпуклостью вниз на этом промежутке.

Если вторая производная $y'' < 0$ на промежутке, то график функция обращен выпуклостью вверх на этом промежутке.

Если при переходе через точку x_1, принадлежащую области определения, вторая производная меняет знак, то эта точка является точкой перегиба.

V. **Таблица значений функции и ее производных.**

VI. **Построение графика.**

Методы интегрирования

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$, где *F*(*x*)- первообразная для функции *f*(*x*), непрерывной на интервале (a,b), C- произвольная постоянная.

I)***Непосредственное интегрирование*** выполняется при помощи:

1)тождественных преобразований подынтегральной функции:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}};\quad x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta};\quad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta};\quad \frac{1}{x} = x^{-1};\qquad a^x \cdot b^x = (ab)^x;\quad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c};$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;\qquad tg^2 x = 1 - \frac{1}{\cos^2 x};\qquad ctg^2 x = 1 - \frac{1}{\sin^2 x};\qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),\qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2};\qquad \sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)}{2};\qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\qquad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\qquad thx = \frac{shx}{chx};\qquad cthx = \frac{chx}{shx};\qquad ch^2 x - sh^2 x = 1.$$

2) свойств неопределенного интеграла:

$$a)\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx;\qquad b)\int d F(x) = F(x) + C.$$

3) таблицы неопределенных интегралов:

$$1)\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\quad \alpha \neq -1;\qquad 2)\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C;\qquad 3)\int a^x dx = \frac{a_x}{\ln a} + C,\quad a > 0,\quad a \neq 1;$$

$$4)\int e^x dx = e^x + C;\qquad 5)\int\cos x\,dx = \sin x + C;\qquad 6)\int\sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$7)\int\frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;\qquad 8)\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;\qquad 9)\int shx\,dx = chx + C;$$

$$10)\int chx\,dx = shx + C;\qquad 11)\int\frac{dx}{ch^2 x} = thx + C;\qquad 12)\int\frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$$

$$13)\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C_1 = -\arccos\frac{x}{a} + C_2;$$

$$14)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C;$$

$$15)\int\frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$16)\int\frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C_1 = -\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C_2$$

II.Формула замены переменной:

$$\int f(x)dx = \left(x = \varphi(t)\right) = \int f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt + C$$

$$\rightarrow \qquad\qquad \leftarrow$$

III. Формула интегрирования по частям: $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du.$

Если $f(x) = \begin{cases} P_n(x)\cdot a^x, \\ P_n(x)\cdot\sin(\alpha x), \\ P_n(x)\cdot\cos(\alpha x), \\ P_n(x)\cdot a^x\sin(\alpha x), \\ P_n(x)\cdot a^x\cos(\alpha x) \end{cases}$ то $u = P_n(x)$.

Если $f(x) = \begin{cases} x^\alpha\log_a x, \\ P_n(x)\cdot\arcsin x, \\ P_n(x)\cdot\arccos x, \\ P_n(x)\cdot arctgx, \\ P_n(x)\cdot arcctgx, \end{cases}$ то u = правый множитель.

IV.Специальные подстановки

а) При интегрировании тригонометрических выражений используются рационализирующие подстановки, которые преобразовывают исходный интеграл в интеграл от рациональной функции: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt.$

1)Если $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, , то $t = \cos x$.

2) Если $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, , то $t = \sin x$.

3) Если $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, , то $t = tgx$ или $t = ctgx$.

4) Если $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ - функция общего вида, то $t = tg\frac{x}{2}$. При этом $\begin{cases} x = 2\,arctg\,t; \quad dx = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt, \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

b) При интегрировании иррациональных выражений используются подстановки:

1) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \left(t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) = \int R_1(t)\,dt.$

2) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \begin{pmatrix} t = x + \dfrac{b}{2a},\ dt = dx \\ ax^2+bx+c = at^2 + k, \quad \text{где } k = c - \dfrac{b^2}{4a} \end{pmatrix} = \int R_1\left(t, \sqrt{at^2+k}\right)dt.$

Далее. Если $a > 0,\ k > 0,\ то\ t = \sqrt{\frac{k}{a}}\,tg\,z.$ Если $a < 0,\ k > 0,\ то\ t = \sqrt{-\frac{k}{a}}\sin z.$ Если $a > 0,\ k < 0,\ то\ t = \sqrt{-\frac{k}{a}}\sec z.$