В.М. ДОРОХОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ВЕКТОРНОМУ АНАЛИЗУ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

МОСКВА, 2015

§1.ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ.

1.Физическое поле. Физическим полем называется часть пространства или все пространство, в котором происходит физическое явление.

2. Скалярное поле. Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, его образующее, характеризуется функцией $f = f(x,y,z)$, зависящей **только от координат** точек пространства, в котором это явление происходит. Скалярное поле полностью определено заданием одной функции $f(x,y,z)$ трех независимых переменных. Эта функция, независимо от ее физического смысла, называется потенциалом поля.

Если физическое явление образовало скалярное поле, то каждой точке $P(x,y,z)$ пространства, в котором происходит это явление, ставится в соответствие определенное число, характеризующее данное явление в рассматриваемой точке. Это число есть частное значение функции $f(x,y,z)$, вычисленное в точке P (примерами скалярного поля являются: поле электростатического потенциала, давление в атмосфере).

3. Поверхность уровня. Если однозначная функция соответствует скалярному полю, образованному физическим явлением, то поверхностью уровня этого поля называется поверхность, во всех точках которой функция $f(x,y,z)$ сохраняет одно и тоже значение.

Поверхность уровня определяется уравнением

$$f(x,y,z) = C, \qquad (1.1)$$

где C – постоянная величина.

Придавая постоянной C различные числовые значения, получим семейство поверхностей уровня. Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня. Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково.

Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $P(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид

$$f(x,y,z) = f(x_1, y_1, z_1). \qquad (1.2)$$

4. Производная по направлению. Производная от функции $\varphi(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{l}$ характеризует скорость изменения функции $\varphi(x,y,z)$ по этому направлению, вычисленную в точке с координатами x, y, z. Эта производная вычисляется по формуле.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\vec{l},x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\vec{l},y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos(\vec{l},z). \qquad (1.3)$$

Величина производной по направлению зависит от выбора точки P, в которой она вычисляется, и от выбора направления, по которому она вычисляется. Направляющие косинусы направления $\vec{l}$ входят множителями в формулу (1.3), а координаты точки P являются аргументами частных производных, входящих в эту формулу.

5. Градиент функции. Градиентом скалярной функции $\varphi(x,y,z)$ называется вектор, проекции которого на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно равны $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, т.е.

$$\text{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}. \qquad (1.4)$$

На основании этого определения проекции вектора grad φ на координатные оси запишутся так:

$$(\text{grad}\,\varphi)_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad (\text{grad}\,\varphi)_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad (\text{grad}\,\varphi)_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (1.5)$$

(предполагается при этом, что $\varphi(x, y, z)$ – однозначная непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные).

Модуль вектора grad φ вычисляется по формуле

$$|\text{grad}\,\varphi| = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}. \qquad (1.6)$$

Если $\overrightarrow{l^0}$ - единичный вектор направления $\vec{l}$

$$\overrightarrow{l^0} = \cos(\vec{i},x)\ \vec{i} + \cos(\vec{i},y)\ \vec{j} + \cos(\vec{i},z)\ \vec{k},$$

то правая часть формулы (1.3) есть скалярное произведение вектора grad φ на этот единичный вектор $\overrightarrow{l^0}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \text{grad}\,\varphi\ \overrightarrow{l^0} \qquad (1.7)$$

Так как $|\overrightarrow{l^0}| = 1$, то скалярное произведение

$$\text{grad}\,\varphi = \overrightarrow{l^0}\,|\text{grad}\,\varphi|\cos(\text{grad}\,\varphi, \overrightarrow{l^0}),$$

поэтому наибольшее значение скалярного произведения gradφ $\overrightarrow{l^0}$ равно модулю gradφ. Это будет иметь место тогда, когда направление вектора $\vec{l}$ совпадет с направлением вектора grad φ, так как в этом случае

$\cos(\text{grad}\,\varphi, \overrightarrow{l^0}) = 1$.

Поскольку производная функции φ по направлению характеризует скорость изменения функции φ по этому направлению, то можно сказать, что вектор

grad φ есть вектор, в направлении которого скорость изменения функции φ является наибольшей и эта наибольшая скорость

$\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_{max}$ по модулю равна | grad φ|, т.е.

$$\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_{max} = |\ \text{grad}\ \varphi| \qquad (1.7а)$$

$$\text{или}\ \left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_{max} = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}. \qquad (1.7б)$$

Вектор grad φ в каждой точке направлен по нормали к поверхности, проходящей через точку, в сторону возрастания функции. Модуль этого вектора равен скорости изменения функции φ(*x*,*y*,*z*) по этому направлению нормали. Скорость изменения скалярной функции φ(*x*,*y*,*z*) по некоторому направлению $(\vec{l})$ равна проекции вектора grad φ на это направление, т.е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \text{Пр}_l\ (\ \text{grad}\ \varphi\ ) \qquad (1.8)$$

В этом состоит основное свойство направление градиента функции: производная функции φ по направлению $\vec{l}$ равна проекции вектора градиента φ на $\vec{l}$.

Величина и направление градиента не зависят от выбора координатной системы.

Задача 1.1. Найти поверхности уровня потенциала $\varphi = \frac{e}{r}$ электростатического поля точечного заряда, где r – расстояние точки М поля от точки, в которой находится электрический заряд.

Решение. Поместим начало координат в точку, в которой находится заряд. По формуле (1.1) $\varphi = \frac{e}{r} = C$; $r = \frac{e}{C}$. Если координаты точки M есть x, y и z, то $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{e}{C}$. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{e^2}{C^2}$ определяет семейство концентрических сфер с центром в точке, в которой помещен заряд.

Задача 1.2. Найти поверхность уровня и градиент скалярного поля $u = \vec{Q}\vec{r}$, где $\vec{Q}$ - постоянный вектор, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки *M.*

Решение. Обозначим координаты точки *M* через *x, y, z,* а координаты вектора $\vec{Q}$ - через *A, B, C.*

Тогда $\vec{Q} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,

$$u = \vec{Q}\vec{r} = Ax + By + Cz.$$

Следовательно, поверхностями уровня являются плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

перпендикулярные к вектору $\vec{Q}$ (*A, B, C*); на каждой из них

$u = -D.$

Градиент поля найдем по формуле

$$grad\ u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = \vec{Q},$$

, т. е. во всех точках $grad\ (\vec{Q}\vec{r}) = \vec{Q}$.

Задача 1.3. Найти производную скалярного поля $\varphi(x,y,z) = xz^2 - \sqrt{x_3 y}$ в точке M(2,2,4) по направлению нормали к поверхности $S = x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0$, образующей острый угол с положительным направлением оси *Oz.*

Решение. Производная скалярного поля $\varphi(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{l}$ вычисляется по формуле (1.3). В нашем случае вектор $\vec{l}$ =

= grad F(x,y,z), где F(x,y,z) = $-x^2 + y^2 + 3z - 12$. Найдем $\vec{l}$ = grad F(x,y,z) по формуле (4): $\vec{l} = -2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3\vec{k}$.

Тогда вектор $\vec{l}$ (M) = $-4\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$. $|\vec{l}\,(\mathrm{M})| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{41}$. Следовательно, $\cos(\vec{l},x) = -\frac{4}{\sqrt{41}}$; $\cos(\vec{l},y) = \frac{4}{\sqrt{41}}$; $\cos(\vec{l},z) = \frac{3}{\sqrt{41}}$.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = z^2 - \tfrac{3}{2}\sqrt{xy}\,; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{y}}\,; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2xz.$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_M = 13; \quad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_M = -1; \quad \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_M = 16.$$

Задача 1.4. Найти угол между градиентами скалярных полей $\varphi(x,y,z) = \frac{z^2}{x^2y^2}$ и $\psi(x,y,z) = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2$ в точке $\mathrm{M}(\frac{2}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}})$.

Решение. Найдем grad φ и grad ψ:

$$\mathrm{grad}\,\psi = 3\sqrt{2}x\vec{i} - \sqrt{2}y\vec{j} + 2\sqrt{2}z\vec{k};$$

$$(\mathrm{grad}\,\psi)_\mathrm{M} = 2\sqrt{2}\vec{i} - 2\sqrt{2}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{3}}\vec{k}.$$

$$|(\mathrm{grad}\,\psi)_\mathrm{M}| = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(4/\sqrt{3}\right)^2} = 8/\sqrt{3}.$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi = -\frac{2z^2}{x^3y^2}\vec{i} - \frac{2z^2}{x^2y^3}\vec{j} + \frac{2z}{x^2y^2}\vec{k};$$

$$(\mathrm{grad}\,\varphi)_\mathrm{M} = -\frac{9}{8}\vec{i} - \frac{3}{8}\vec{j} + \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\vec{k};$$

$$|(\text{grad}\,\varphi)_M| = \sqrt{\left(-\frac{9}{8}\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3}{2}\ .$$

Используя скалярное произведение векторов, найдем $\cos\alpha$,

где α - угол между градиентами.

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}\left(-\frac{9}{8}\right) + \left(-2\sqrt{2}\right)\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{3}{2}\right)} = 0.$$

Следовательно, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

§2.ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Если в каждой точке M пространства (или его части V) задан определенный вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что в этом пространстве (или в V) задано **векторное поле** $\vec{a}$. Задание векторного поля $\vec{a}$ равносильно заданию трех скалярных функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$, являющихся проекциями вектора $\vec{a} = \vec{a}(M)$ на координатные оси:

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}\ . \qquad (2.1)$$

В качестве примеров векторных полей можно указать поле электрической напряженности, силовое поле, поле скоростей текущей жидкости и т.д. Векторное поле (2.1) называют **дифференцируемым в области V** , если в каждой точке области существуют непрерывные частные производные от функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ по всем аргументам. Если проекции вектора

$\vec{a} = \vec{a}(M)$ не зависят от какой-нибудь из трех переменных x,y,z и одна из проекций равна нулю, поле называют **плоским**. Например, плоским является поле

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} \qquad (2.2)$$

Векторной линией поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называется такая линия, касательная в каждой точке которой направлена вдоль заданного в этой точке вектора поля.

Всякое векторное поле (2.1) обладает семейством векторных линий. Уравнение этого семейства есть общее решение дифференциального уравнения вида

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \qquad (2.3)$$

Введя параметр *t* и обозначив каждое из соотношений (2.3) через *dt*, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y,z); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y,z); \quad \frac{dz}{dt} = R(x,y,z).$$

Решения *x(t), y(t), z(t)* этой системы и будут параметрическими уравнениями векторных линий.

Уравнения векторных линий плоского поля (2.2) определяются общим решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}. \qquad (2.4)$$

Задача 2.1. Найти векторные линии поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} - 2\vec{k}.$

Решение. Данное поле определено и дифференцируемо во всем пространстве, так как функции $P = y$, $Q = -x$, $R = -2$ (проекции вектора $\vec{a}$) имеют непрерывные частные производные в любой точке.

Уравнение (2.3) для заданного поля принимает вид

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}, \quad \frac{dy}{x} = \frac{dz}{2}.$$

Интегрируя уравнение $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$, находим $x^2 + y^2 = C^2$ $(C > 0)$. Если ввести параметр t, получим $x = C\cos t$,

$y = C\sin t$. С учетом этого уравнение $\frac{dy}{x} = \frac{dz}{2}$ примет вид

$$\frac{C\cos t dt}{C\cos t} = \frac{dz}{2} \Rightarrow dz = 2dt \Rightarrow z = 2t + C_1.$$

Таким образом, $x = C\cos t$, $y = C\sin t$, $z = 2t + C_1$ - параметрическое уравнение векторных линий поля $\vec{a}$.

При фиксированном C получаем уравнение винтовой линии, расположенной на цилиндре радиусом C с осью, совпадающей с Oz. Вдоль каждой векторной линии вектор $\vec{a}$ имеет постоянную длину, которая определяется выражением

$$|\vec{a}| = \sqrt{y^2 + x^2 + 4} = \sqrt{(C\sin t)^2 + (C\cos t)^2 + 4} = \sqrt{4 + C^2}.$$

Если считать данное поле $\vec{a}$ полем скоростей текущей жидкости, то каждая частица жидкости будет двигаться вдоль своей траектории с постоянной линейной скоростью.

§3. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТОКА ЧЕРЕЗ НЕЗАМКНУТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ.

Пусть в пространственной области V задано векторное поле $\vec{a}$ = $= P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ и некоторая ориентированная поверхность S. Обозначим через $\overrightarrow{n^0} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности в ее произвольной точке. Рассмотрим поверхностный интеграл первого рода по поверхности S от скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор $\overrightarrow{n^0}$:

$$\iint\limits_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) ds = \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) ds \qquad (3.1)$$

Интеграл (3.1) для произвольного векторного поля $\vec{a}$ называется **потоком векторного поля через ориентированную поверхность S** и **обозначается $\Pi_s(\vec{a})$:**

$$\Pi_s(\vec{a}) = \iint\limits_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) ds \qquad (3.2)$$

В случае замкнутой поверхности S в качестве $\overrightarrow{n^0}$ берется вектор к внешней стороне этой поверхности, а поток записывается в виде

$$\Pi_s(\vec{a}) = \iint\limits_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) ds$$

Воспользовавшись формулами (3.1), (3.2) и формулой, связывающей поверхностные интегралы первого и второго рода, будем иметь

$$\Pi_s(\vec{a}) = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Приведем основные свойства потока.

1. $\Pi_{s^+}(\vec{a}) = -\Pi_{s^-}(\vec{a})$, где S^+ и S^- - две стороны поверхности S.

2. Если S состоит из частей S_1, S_2, …, S_m, то $\Pi_s(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{m} \Pi_{s_i}(\vec{a})$ (аддитивность).

Физический смысл потока зависит от природы поля $\vec{a}$. Если, например, $\vec{a}$ - поле скоростей текущей жидкости в области V и $S \subset V$ – незамкнутая поверхность с выбранным направлением нормали $\overrightarrow{n^0}$, то $\Pi_s(\vec{a})$ равен количеству жидкости, проходящей в единицу времени через поверхность S в направлении $\overrightarrow{n^0}$. Если $\vec{a}$ - силовое поле, то говорят, что $\Pi_s(\vec{a})$ выражает количество силовых (векторных) линий, пронизывающих в единицу времени поверхность S в направлении $\overrightarrow{n^0}$. Если S – замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область G , с внешней нормалью $\overrightarrow{n^0}$, то $\Pi_s(\vec{a})$ равен разности числа векторных линий, выходящих из области G , и числа векторных линий, входящих в эту область. Когда $\Pi_s(\vec{a}) = 0$, в область входит столько же линий, сколько и выходит. Если $\Pi_s(\vec{a}) > 0$, из области G выходит больше линий, чем входит. Это означает, что в области G имеются **источники**, т.е. места, которые как бы порождают векторные линии. Если же $\Pi_s(\vec{a}) < 0$, это указывает на наличие в области G **стоков –** мест, где векторные линии исчезают**.**

Так как поток векторного поля определяется поверхностным интегралом, способы вычисления потока сводятся к известным способам вычисления поверхностных интегралов. В некоторых случаях удобнее использовать **цилиндрические** и **сферические** координаты.

Если S – часть цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, ограниченной поверхностями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ $(z_1(x, y) \le z_2(x, y))$, то, выбирая в пространстве цилиндрические координаты r, φ, z и учитывая, что на данной цилиндрической поверхности координата r = a (x = a cosφ, y = a sin φ, z = z), поток векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ через рассматриваемую поверхность вычисляется по формуле

$$\Pi_s(\vec{a}) = \pm \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1(a\cos\varphi, a\sin\varphi)}^{z_2(a\cos\varphi, a\sin\varphi)} (xP + yQ)\, dz. \qquad (3.3)$$

Пусть S –часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, ограниченной коническими поверхностями $\theta = \theta_1(\varphi)$ и $\theta = \theta_2(\varphi)$ ($\theta_1(\varphi) \le \theta_2(\varphi)$) и полуплоскостями $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ $(\varphi_1 < \varphi_2)$. Здесь θ и φ - сферические координаты. Тогда поток векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ через рассматриваемую поверхность вычисляется по формуле

$$\Pi_s(\vec{a}) = \pm a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} (xP + yQ = zR) \sin\theta\, d\theta. \qquad (3.4)$$

В формулах (3), (4) плюс или минус берется в соответствии с выбором внешней или внутренней стороны поверхности.

Задача 3.1. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + 2(y + z)\vec{j} + (2x + z)\vec{k}$ через треугольник σ, вырезанный из плоскости $3x – 2y + 2z – 6 = 0$ координатными плоскостями, в том направлении нормали к данной плоскости, которая образует с осью *Oy* острый угол (рис. 1).

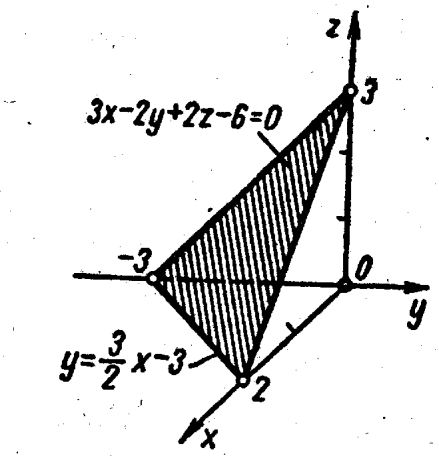

Рис. 1

Решение. Поток $\Pi = \iint\limits_{\sigma} \left(\vec{F}, \vec{n}\right) d\sigma$. Определим единичный вектор $\vec{n}$, направленный по нормали к данной плоскости $3x - 2y + 2z - 6 = 0$ и образующий с осью Oy острый угол. Для этого вспомним, что коэффициенты при x, y и z в уравнении плоскости являются координатами вектора, перпендикулярного к ней. Таким образом вектор $3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ перпендикулярен к нашей плоскости. Но он имеет отрицательную проекцию на ось Oy и, следовательно, образует с этой осью тупой угол.

Возьмем противоположный вектор $-3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ и разделим этот вектор на его длину. Получим искомый единичный вектор.

$$\vec{n} = \cos(n,x)\,\vec{i} + \cos(n,y)\,\vec{j} + \cos(n,z)\,\vec{k} = \frac{-3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{17}}.$$

Найдем теперь скалярное произведение $\left(\vec{F}, \vec{n}\right)$:

$$\left(\vec{F}, \vec{n}\right) = \frac{-3(x+y) + 4(y+z) - 2(2x+z)}{\sqrt{17}} = \frac{-7x + y + 2z}{\sqrt{17}}.$$

Отсюда $\Pi = \iint\limits_{\sigma} \left(\vec{F}, \vec{n}\right) d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \frac{-7x + y + 2z}{\sqrt{17}}\, d\sigma.$

Чтобы вычислить этот интеграл по поверхности σ, заменим его двойным интегралом по проекции D поверхности σ на плоскость xOy. Элемент площади поверхности равен

$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos(n,z)} = \frac{\sqrt{17}}{2} dxdy$ и на поверхности σ $2z = 6 - 3x + 2y$. Следовательно, $\Pi = \iint\limits_{\sigma} \frac{-7x + y + (6 - 3x + 2y)}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{2} dxdy = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{3}{2}x-3}^{0} \left(-5x + \frac{3}{2}y + 3\right) dy = -5,5.$

Если речь идет о потоке жидкости, то знак “ минус” указывает, что за единицу времени в выбранном направлении через поверхность протекает меньшее количество жидкости, чем в противоположном.

Задача 3.2. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ через верхнюю сторону части поверхности $z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$.

Решение. Поверхность $z = 2 - x^2 - y^2$ является параболоидом вращения (рис. 2). Она однозначно проецируется на плоскость xOy в область D_{xy} – круг радиусом $R = \sqrt{2}$

с центром в начале координат. Поэтому для вычисления потока применим формулу

$$\iint\limits_S P dydz + Q dxdz + R dxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{xy}} \left(\vec{a}, \vec{n}\right)\big|_{z = z(x,y)} dxdy. \qquad (*)$$

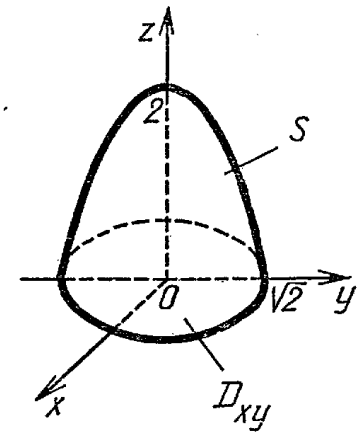

Рис. 2.

Так как верхняя сторона параболоида видна со стороны положительного направления оси Oz, если смотреть на плоскость xOy, то перед интегралом по области D_{xy} надо взять плюс. Исходя из уравнения $z = 2 - x^2 - y^2$, находим вектор нормали к поверхности S: $\vec{n} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$. Определим подынтегральную функцию для интеграла (*):

$$\left(\vec{a}, \vec{n}\right)\big|_{z=2-x^2-y^2} = (2x^2 + 2y^2 - z)\big|_{z=2-x^2-y^2} = 3(x^2 + y^2) - 2.$$

Следовательно, $\Pi_s(\vec{a}) = +\iint\limits_{D_{xy}} (3(x^2 + y^2) - 2)dxdy =$

(перейдя к полярным координатам)

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(3r^2 - 2\right) r dr = 2\pi.$$

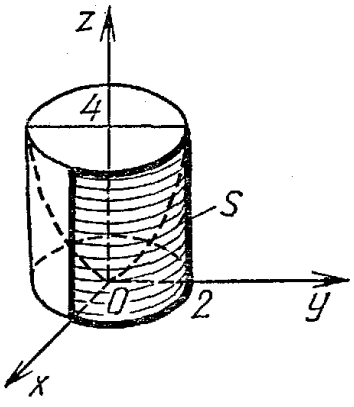

Рис.3.

Задача 3.3. Вычислить поток вектора $\vec{a} = (4x - 3y)\vec{i} + (2y - 6x)\vec{j} - y^2z^3\vec{k}$ через внутреннюю сторону боковой поверхности части цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, ограниченной плоскостью $z = 0$, параболоидом $z = x^2 + +y^2$ и расположенной в первом октанте (рис.3).

Решение. Выберем в пространстве цилиндрические координаты: r, φ, z. Тогда для точек поверхности S (части цилиндра) $r = 2$, поэтому $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, $z = z$. Так как для точек поверхности S угол φ изменяется от 0 до $\pi/2$, а координата z –от 0 до 4 (до плоскости, на которой пересекаются цилиндр $x^2 + y^2 = 4$ и параболоид $z = x^2 + y^2$), то по формуле (3.3) с учетом выбора внутренней стороны цилиндра получим

$$\Pi_s(\vec{a}) = -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^4 (x(4x - 3y) + y(2y - 6x))dz =$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^4 (8\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi - 18\cos\varphi\sin\varphi)\,dz = 24(3 - \pi).$$

Задача 3.4. Вычислить поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, которая вырезана конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 4).

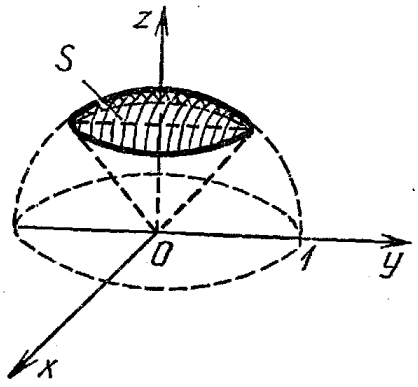

Рис.4.

Решение. Выберем в пространстве сферические координаты: ρ, φ, θ. Тогда для точек поверхности S координата $\rho = 1$, поэтому $x = \cos\varphi\sin\theta$, $y = \sin\varphi\sin\theta$, $z = \cos\theta$. Так как для точек поверхности S угол φ изменяется от 0 до 2π, а при каждом фиксированном φ угол θ изменяется от 0 ($\theta = 0$ соответствует точке (0, 0, 1), лежащей на оси *Oz*) до $\pi/4$ ($\theta = \pi/4$ соответствует точкам, лежащим на конусе $z = \sqrt{x^2 + y^2}$), то с учетом выбора внешней стороны сферы по формуле (3.4)

получим $\Pi_s(\vec{a}) = + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(xx^3 + y(-y)^3 + zz\right) \sin\theta d\theta =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\sin^4\theta \cos 2\varphi + \cos^2\theta\right) \sin\theta d\theta\Big) = 2\pi(1 - 0{,}25\sqrt{2})/3.$

§4.ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО.

Если векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ дифференцируемо в замкнутой области V, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой поверхностью S, то имеет место **формула Остроградского**

$$\oiint_S P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

где S - положительно ориентированная поверхность.

Дивергенцией векторного пола $\vec{a}$ в точке M называется предел отношения потока поля через замкнутую поверхность S, окружающую точку M, к объему v тела, ограниченного этой поверхностью, при стремлении диаметра d тела к нулю:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{d\to 0} \frac{\oiint_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) ds}{v} .$$

По знаку дивергенции можно судить о наличии источника или стока векторного поля в рассматриваемой точке M. Так, если $\operatorname{div}\vec{a}(M) > 0$, то в точке M источник, а если $\operatorname{div}\vec{a}(M) < 0$, - то сток. Если $\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0$, то источников и стоков в точке M нет. Абсолютная величина $|\operatorname{div}\vec{a}(M)|$ характеризует **мощность источника или стока в точке M.**

Если векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ дифференцируемо в области V, то в любой точке $M \in V$ существует $\operatorname{div}\vec{a}$, причем

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \qquad (4.1)$$

где частные производные вычислены в точке M.

С учетом равенств (3.2) и (4.1) формулу Остроградского можно записать в векторной форме:

$$\iint_S \left(\vec{a}, \vec{n^0}\right) ds = \iiint_V div\vec{a}\, dv. \qquad (4.2)$$

Векторное поле называется **соленоидальным** (или **трубчатым**) **в области V** , если его дивергенция равна 0 в каждой точке области. Для соленоидального поля в области V характерно следующее: в области V отсутствуют источники и стоки; $\Pi_s(\vec{a}) = 0$ для любой замкнутой поверхности $S \subset V$; векторные линии поля являются замкнутыми или имеют концы на границе области V.

Задача 4.1. Дан вектор $\vec{F} = x^2\vec{i} - z^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ и задана плоскость P уравнением $2x + y + z = 2$. Плоскость P вместе с координатными плоскостями образует поверхность пирамиды (рис. 5).С помощью формулы Остроградского найти поток поля вектора $\vec{F}$ через поверхность пирамиды в направлении внешней нормали.

Решение. Поток поля $\vec{F}$ выражается формулой

$$\Pi = \iint_\sigma \vec{F}\vec{n}\, d\sigma.$$

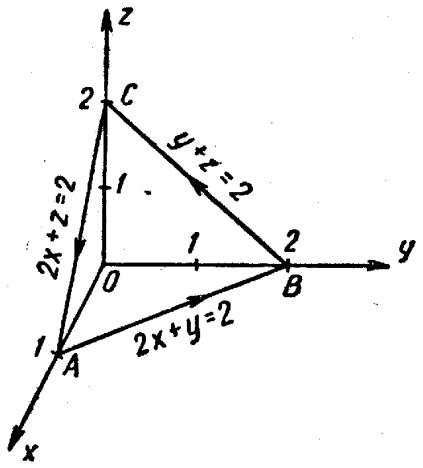

Рис. 5

Пользуясь формулой Остроградского, находим

$$\Pi = \iiint_V div\vec{F}\, dV,$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-z^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2\right) = 2x.$$

Следовательно

$$\Pi = \iiint\limits_V 2xdV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{2-2x-y} 2xdz = \frac{1}{3}.$$

Задача 4.2. Дано векторное поле $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + z^2\vec{k}$. Вычислить дивергенцию поля $\vec{a}$ в точке M(-1, -2, 1) и поток векторного поля через внешнюю сторону замкнутой поверхности S, состоящей из части парпболоида $x^2 + y^2 = 3z$ и части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, накрывающей параболоид (рис.6).

Решение. Данное векторное поле определено и дифференцируемо во всем пространстве. Поэтому, воспользовавшись формулой (4.1), получим

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 - 1 + 2z = 2z,$$

а следовательно, в точке M(-1, -2, 1) $\operatorname{div}\vec{a}\,(M) = 2$. Последний результат говорит о том, что в точке M есть источник, мощность которого равна 2.

Анализируя полученное выражение для дивергенции данного векторного поля, приходим к выводу, что в любой точке, расположенной выше (ниже) плоскости *xOy*, имеется источник (сток) векторного поля $\vec{a}$. В точках плоскости *xOy* (здесь *z* = 0) нет источников и стоков.

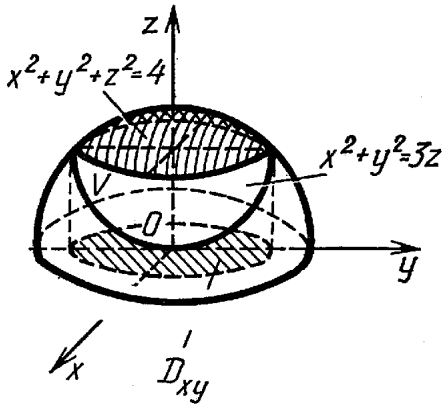

Рис.6.

Найдем поток данного поля по формуле (4.2)

$$\Pi_s(\vec{a}) = \iint\limits_S \left(\vec{a}, \vec{n^0}\right) ds = \iiint\limits_V 2z dv.$$

Вычисляя тройной интеграл по области V (рис.6) в цилиндрических координатах (x = r cosφ, y = r sin φ, $z = z$), получаем

$$\Pi_s(\vec{a}) = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} rdr \int\limits_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} zdz = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(4 - r^2 - r^2/9\right) rdr = 6{,}5\pi$$

(При расстановке пределов интегрирования учтено, что уравнения параболоида и сферы в цилиндрических координатах имеют вид соответственно $r^2 = 3z$ и z

$= \sqrt{4 - r^2}$, а также то, что параболоид и сфера пересекаются по окружности $r = \sqrt{3}$, которая получается исключением z из уравнения данных поверхностей.)

Задача 4.3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S, состоящей из частей сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ и конуса $\sqrt{x^2 + y^2} = z\sqrt{3}.$

Решение. Данное поле $\vec{a}$ определено и дифференцируемо во всем пространстве, поэтому поток поля $\vec{a}$ можно вычислить по формуле (4.2). Согласно формуле (4.1), $\operatorname{div}\vec{a} = 3z^2$, следовательно, $\Pi_s(\vec{a}) =$

$= \iiint\limits_V 3z^2\,dxdydz,$ где область V изображена на рис.7. Полученный тройной интеграл удобно вычислять в сферических координатах $\rho, \varphi, \theta,$ для которых элемент

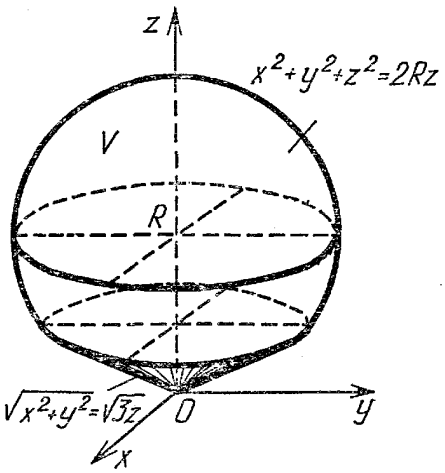

Рис.7.

$\overrightarrow{\tau^0}$ объема $dv = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta,$ а уравнения сферы и конуса имеют вид $\rho = 2R\cos\theta$ и $\theta = \pi/3$ соответственно. Учитывая, что для области V угол φ изменяется от 0 до 2π, угол θ от 0 до $\pi/3$, а ρ от 0 до $2R\cos\theta$, получаем $\Pi_s(\vec{a}) =$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho^2\cos^2\theta\cdot\rho^2\sin\theta d\rho =$$

$$= 6\pi\int_0^{\pi/3} \cos^2\theta\sin\theta d\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{192\pi R^5}{5}\int_0^{\pi/3} \cos^7\theta\cdot\sin\theta d\theta = \frac{153\pi R^5}{32}.$$

Задача 4.4. Проверить соленоидальность поля

$$\overrightarrow{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} - z\left(y + \frac{z}{2}\right)\vec{k}.$$

Решение. Вычислим $\operatorname{div}\overrightarrow{F}$:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-z\left(y + \frac{z}{2}\right)\right) = y + z - y - z = 0.$$

Так как div $\vec{F} = 0$, то поле соленоидальное.

§ 5. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ И ЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Пусть в области V заданы непрерывное векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и ориентированная гладкая линия L (на линии указано направление ее обхода). Обозначим через $\overrightarrow{\tau^0}$ единичный вектор касательной к линии L , направление которого совпадает с выбранным направлением на линии.

Линейным интегралом W векторного поля $\vec{a}$ вдоль линии L называется криволинейный интеграл первого рода от скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\overrightarrow{\tau^0}$:

$$\mathbf{W} = \int_L \left(\vec{a}, \overrightarrow{\tau^0}\right) dl, \qquad (5.1)$$

где *dl* – дифференциал дуги линии.

Линейный интеграл (5.1) может быть записан в различных видах. Например, если ввести в рассмотрение вектор $d\vec{r} = \overrightarrow{\tau^0}\, dl$ ($\vec{r}$ - радиус-вектор точки, описывающей линию L) и обозначить его проекции на координатные оси через *dx, dy, dz*, то формулу (5.1) можно записать в виде

$$W = \int_L \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \int_L P dx + Q dy + R dz, \qquad (5.2)$$

Где вектор $d\vec{r}$ направлен по касательной к L (направление $d\vec{r}$ согласовано с направлением обхода вдоль линии L). Правая часть равенства (5.2) есть криволинейный интеграл второго рода.

Если $\vec{a}$ - силовое поле, то линейный интеграл равен работе, которую поле совершает по перемещению материальной точки вдоль ориентированной линии.

Если $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ - произвольное векторное поле, а L – замкнутая линия, линейный интеграл называется **циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ вдоль замкнутой линии L** и обозначается $Ц_L(\vec{a})$:

$$Ц_L(\vec{a}) = \oint_L \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \qquad (5.3)$$

В дальнейшем будем считать, что в интеграле (5.3) линия L всегда обходится в положительном направлении.

Циркуляция векторного поля характеризует вращательную способность поля на линии. Поэтому часто говорят, что если $Ц_L(\vec{a}) > 0$ ($Ц_L(\vec{a}) < 0$), то линия L, расположенная в поле $\vec{a}$, под действием силы $\vec{a}$ вращается в положительном (отрицательном) направлении. В случае, если $Ц_L(\vec{a}) = 0$, линия L не вращается.

Задача 5.1. Вычислить линейный интеграл плоского векторного поля $\vec{a} = (2x - y^2 + 1)\vec{i} + (3x + 2y^2 - 10)\vec{j}$ по линии L , соединяющей точки A(-1, -2) и B(2, 1), если линия L есть: а) парабола $x = 3 - y^2$ (L_1 = ACB); б) прямая, соединяющая точки A и B (L_2 = AB) (рис.8). Чему равна циркуляция векторного поля по замкнутой линии ACBA?

Решение. а) Согласно формуле (5.2), для данного плоского векторного поля имеем

$$W_1 = \int_{L_1} \left(2x - y^2 + 1\right) dx + (3x + 2y^2 - 10)dy$$

где линия L_1 = ACB (рис. 6) задана явным уравнением $x = 3 - y^2$. Подставляя $x = 3 - y^2$ в выражение для W_1 и учитывая, что y изменяется вдоль L_1 от –2 до 1, получаем

$$W_1 = \int_{-2}^{1} ((2(3 - y^2) - y^2 + 1)(-2y) + (3(3 - y^2) + 2y^2 - 10))dy = -7{,}5.$$

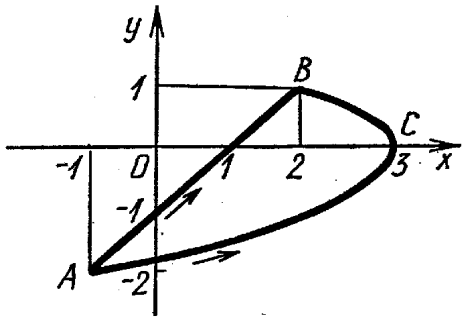

Рис.8.

б) Линия L_2 = AB – отрезок прямой $y = x - 1$, причем x изменяется от –1 до 2, следовательно,

$$W_2 = \int_{-1}^{2} ((2x - (x-1)^2 + 1) + (3x + 2(x-1)^2 - 10)dx = -16{,}5.$$

Из полученных результатов следует, что значения линейного интеграла данного векторного поля $\vec{a}$ по различным линиям L_1 и L_2 , соединяющим одни и те же точки A и B, не совпадают. Это обстоятельство характерно для большинства векторных полей.

Для вычисления циркуляции поля сложим линейные интегралы вдоль линий L_1 и L_2, которые составляют замкнутую линию ACBA:

$$Ц_L(\vec{a}) = W_1 + (- W_2) = -7{,}5 + 16{,}5 = 9.$$

Минус перед W_2 взят потому, что направление BA противоположно направлению AB.

Задача 5.2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + (x^2 - 2y)\vec{k}$ вдоль линии L, получающейся в результате сечения полусферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$.

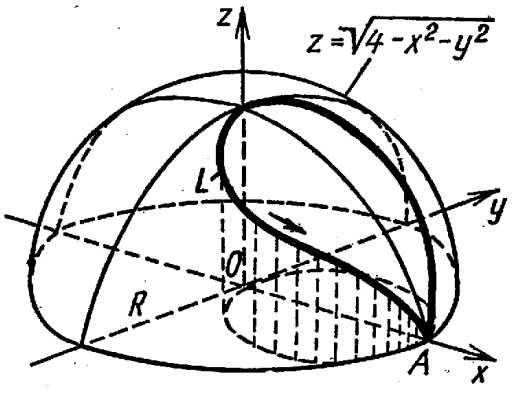

Рис.9.

Решение. Данная линия L проецируется на плоскость xOy в окружность $x^2 + y^2 = 2x$ (рис.9), параметрическое уравнение которой имеет вид $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \le 2\pi)$. Линия L лежит на полусфере $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, поэтому для точек линии L аппликата $z = \sqrt{4 - (1 + \cos t)^2 - (\sin t)^2} = 2\sin\frac{t}{2}$.

Таким образом, параметрическое уравнение линии L имеет вид: $x = 1 + \cos t$;

$y = \sin t$; $z = 2 \sin \frac{t}{2}$

$(0 \le t \le 2\pi)$.

Следовательно, $Ц_L(\vec{a}) = \int_L y^2 dx + z^2 dy + (x^2 - 2y)dz =$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t(-\sin t) + 4\sin^2 \frac{t}{2}\cos t + ((1+\cos t)^2 - 2\sin t)\cos \frac{t}{2})dt = -\frac{6\pi+16}{3}.$$

Задача 5.3. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = -(a \cdot \cos t\vec{i} + b \cdot \sin t\vec{j})$ вдоль дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, z = 0

от точки *A(a, 0, 0)* до точки *B(0, b, 0).*

Решение. Параметрическое уравнение данного эллипса имеет вид $x =$ $= a \cos t$, $y = b \sin t$, $z = 0$, причем точке А соответствует значение параметра $t_A = 0$, а точке В – значение $t_B = = \frac{\pi}{2}$. Так как $dx = -a \sin t\, dt$, $dy = b \cos t\, dt$, $dz = 0$, то по формуле (5.2) получаем:

$$W = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a \cdot \cos t\left(-a \cdot \sin t\right) + b \cdot \sin t \cdot b \cdot \cos t\right) dt =$$

$$= -(b^2 - a^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

§6. РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ФОРМУЛА СТОКСА.

Если векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ дифференцируемо в точке М, то **ротором** (или **вихрем**) **векторного поля** $\vec{a}$ **в точке М** называется вектор

$$\text{rot}\ \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

где частные производные вычислены в этой точке.

В символической форме ротор записывается так:

$$\text{rot}\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (6.1)$$

Векторное поле $\vec{a}$ называется **безвихревым в области V,** если в каждой ее точке $\text{rot}\,\vec{a} = 0$.

Если векторное поле $\vec{a}$ дифференцируемо в пространственной области V и в этой области расположен некоторый замкнутый контур L , то для любой незамкнутой поверхности $S \subset V$, опирающейся на контур L, имеет место **формула Стокса**

$$\oint_L \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \iint_S \left(rot\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) ds, \qquad (6.2)$$

где ориентация незамкнутой поверхности S согласована с направлением обхода контура L, т. е. на S берется та сторона, в точках которой вектор нормали $\overrightarrow{n^0}$ направлен так, чтобы видимый с его конца обход контура L совершался против часовой стрелки.

Формула Стокса позволяет свести вычисления циркуляции векторного поля $\vec{a}$ по контуру L к вычислению потока поля $\text{rot}\,\vec{a}$ через незамкнутую поверхность S, опирающуюся на контура L (L – граница незамкнутой поверхности S). Заметим, что от этой поверхности S требуется только то, чтобы она опиралась на контур L, поэтому на практике ее следует выбирать наиболее простой формы (если есть возможность, то плоскость). При вычислении $\Pi_S(\text{rot}\,\overrightarrow{a})$ через выбранную поверхность S можно использовать все формулы для вычисления $\Pi_s(\vec{a})$ (§3), если заменить в них вектор $\vec{a}$ на $\text{rot}\,\vec{a}$. В частности, если замкнутый контур L накрыт незамкнутой поверхностью S, уравнение которой *z = z(x, y),* то

$$Ц_L(\vec{a}) = \pm\iint\limits_{D_{xy}} \left(rot\vec{a}, \vec{n}\right)|_{z=z(xy)}\, dxdy, \qquad (6.3)$$

Где плюс (минус) в том случае, если контур L обходится в положительном (отрицательном) направлении, если смотреть со стороны положительного направления оси *Ox*; D_{xy} – проекция S на плоскость *xOy*; $\vec{n} = -z_x'\vec{i} - z_y'\vec{j} + \vec{k}$ - вектор нормали к поверхности S.

Пусть векторное поле $\vec{a}$ дифференцируемо в области V и точка $M \in V$. Если через точку M провести плоскость, перпендикулярную к некоторому заданному вектору $\vec{n^0}$, и описать в этой плоскости замкнутый контур $L \subset V$, окружающий точку M (направление обхода на L согласовано с ориентацией плоскости), то предел, к которому стремится отношение $Ц_L(\vec{a})/s$ (s – площадь области, ограниченной L) при стягивании контура L к точке M, называется плотностью μ_M циркуляции поля $\vec{a}$ в точке M в направлении вектора $\vec{n^0}$.

Если к поверхностному интегралу в формуле (6.2) применить теорему о среднем, то можно показать, что

$$\mu_M = (\mathrm{rot}\,\vec{a}(M), \vec{n^0}). \qquad (6.4)$$

Из последней формулы следует, что плотность циркуляции в точке M будет наибольшей в том случае, когда направление вектора $\vec{n^0}$ совпадает с направлением rot $\vec{a}(M)$. Это значит, что направление ротора – то направление, по которому плотность циркуляции в точке максимальна, а длина ротора равна этой максимальной плотности циркуляции.

Задача 6.1. Тело вращается вокруг оси и имеет угловую скорость ω в данный момент времени t Найти ротор (вихрь) поля скоростей $\vec{v}$ точек тела в этот момент времени.

Решение. Примем ось вращения за координатную ось *Oz* и отложим на ней вектор $\vec{\omega}$, численно равный угловой скорости ω (рис. 10) Скорость $\vec{v}$ произвольной точки M(x, y, z) тела равна векторному произведению вектора $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$

на радиус-вектор $r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ точки *M*.

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}.$$

Ротор вектора $\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ найдем по формуле

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

У нас $v_x = -\omega y, v_y = \omega x, v_z = 0$. Отсюда

$$\text{rot } \vec{v} = (\omega - (-\omega))\vec{k} = 2\omega\vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

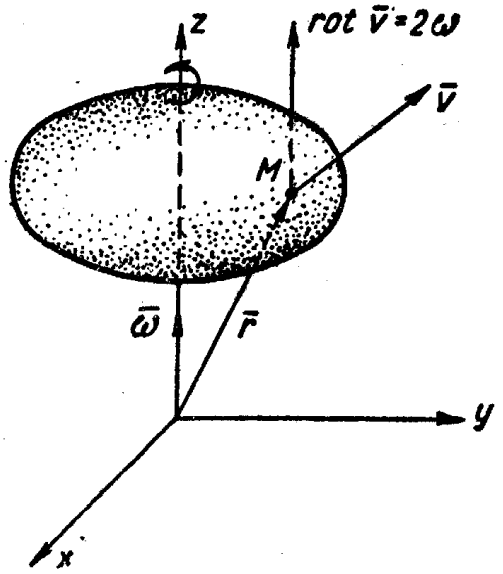

Рис. 10

Итак, в каждый момент времени t ротор поля скоростей $\vec{v}$ точек твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси, равен удвоенному вектору угловой скорости тела.

Задача 6.2. Для векторного поля $\vec{a} = (y^3 - 8yz - z)\vec{i} + (yz - -x^3 + 2x)\vec{j} + (yx^3 - 2z^3)\vec{k}$ найти ротор; плотность циркуляции в точке M(2, 1, -1) по направлению единичного вектора $\vec{n_1^0} = (\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})/3$; наибольшую плотность циркуляции в точке M; циркуляцию поля вдоль контура L, получаемого пересечением параболоида $z = x^2 + y^2$ плоскостью $z = 1$ и ориентированно положительно по отношению к оси *Oz*.

Решение. Данное поле $\vec{a}$ определено и дифференцируемо во всем пространстве. Следовательно, в каждой точке пространства существует ротор поля, который можно определить по формуле (6.1):

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 - 8yz - z & yz - x^3 + 2x & yx^3 - 2z^3 \end{vmatrix} = (x^3 - y)\vec{i} - (3yx^2 + +8y +$$

$+\ 1)\vec{j} + (2 - 3x^2 - 3y^2 + 8z)\vec{k}$.

В точке M(2, 1, -1) rot $\vec{a}$(M) = 7($\vec{i}$ - 3$\vec{j}$ - 3$\vec{k}$).

Плотность циркуляции данного поля в точке M по направлению вектора $\overrightarrow{n_1^0}$ найдем по формуле (6.4):

$$\mu_M = \frac{7}{3}(1\cdot 1 + 3\cdot 2 - 3\cdot 2) = \frac{7}{3}.$$

Наибольшая плотность циркуляции поля в точке M равна длине ротора в этой точке, т. е.

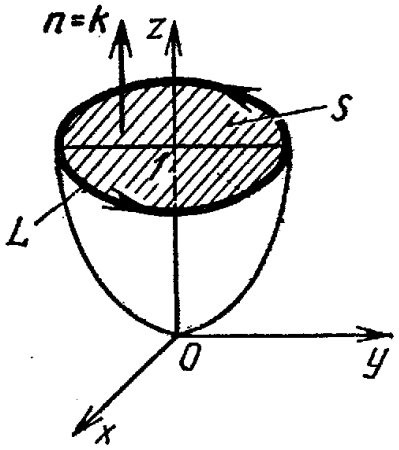

Рис.11.

$$\max \mu_M = |\text{rot}\ \vec{a}(M)| =$$

$$= 7\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = 7\sqrt{19}.$$

Построим контур (рис.11). Этот контур – окружность с радиусом, равным 1 и с центром в точке (0, 0, 1). Так как окружность лежит в плоскости z = 1, то в качестве поверхности S, накрывающей контур L, выберем часть этой плоскости, ограниченную указанным контуром. Вектор нормали к этой плоскости есть $\vec{n} = \vec{k}$, а ротор данного поля

rot $\vec{a}$ $= (x^3 - y)\vec{i} - (3yx^2 + 8y + 1)\vec{j} + (2 - 3x^2 - 3y^2 + +8x)\vec{k}$.

Поэтому (rot $\vec{a}, \vec{n}$) $= 2 - 3x^2 - 3y^2 + +8z$.

Учитывая, что контур L следует обходить в положительном направлении по отношению к оси *Oz* и взятая поверхность S однозначно проецируется на плоскость *xOy* в круг $x^2 + y^2 \le 1$,

По формуле (6.3) получим $Ц_L(\overrightarrow{a}) = + \iint\limits_{D_{xy}} (10 - 3x^2 - 3y^2)dxdy =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(10 - 3r^2\right) r dr\Big) = 17\pi/2.$$

Задача 6.3. Дан вектор $\vec{F} = x^2\vec{i} - z^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ и задана плоскость P уравнением 2x + y + z = 2. Плоскость P вместе с координатными плоскостями образует поверхность пирамиды (рис. 5). Найти циркуляцию поля вектора $\vec{F}$ вдоль линии λ пере сечения плоскости P с координатными плоскостями непосредственно и по формуле Стокса, принимая в формуле Стокса за поверхность, по которой производится интегрирование, три грани пирамиды, лежащие в координатных плоскостях. Считать положительным то направление обхода линии λ, при котором точка пробегает ее по ходу часовой стрелки, если смотреть на начало координат.

Решение. Вычислим искомую циркуляцию вектора $\vec{F} = = x^2\vec{i} - z^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ вдоль линии λ, т. е. вдоль линии ABCA (направление обхода этой линии указано стрелкой на рис. 5). Тогда

$$\text{Ц} = \int_{\lambda} \vec{F}ds = \int_{\lambda} Xdx + Ydy + Zdz = \int_{ABCA} x^2dx - z^2dy + y^2dz =$$

$$= \int_{AB} x^2dx - z^2dy + y^2dz + \int_{BC} x^2dx - z^2dy + y^2dz + \int_{CA} x^2dx - z^2dy + y^2dz.$$

Вычислим каждый из этих интегралов.

На линии AB ($x = 0,\ dx = 0$) x изменяется от 1 до 0. Поэтому

$$\int_{AB} x^2dx - z^2dy + y^2dz = \int_1^0 x^2dx = -\frac{1}{3}.$$

На линии BC ($x = 0,\ y = 2 - z,\ dy = -dz$) z изменяется от 0 до 2. Поэтому $\int_{BC} x^2dx - z^2dy + y^2dz = \int_0^2 -z^2(-dz) + (2-z)^2dz = \frac{16}{3}.$

На линии CA ($y = 0,\ dy = 0$) x изменяется от 0 до 1. Поэтому

$$\int_{CA} x^2dx - z^2dy + y^2dz = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}.$$

Отсюда циркуляция $\text{Ц} = -\frac{1}{3} + \frac{16}{3} + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}.$

Вычислим циркуляцию, пользуясь формулой Стокса. По формуле Стокса Ц = $\iint\limits_{\sigma} \vec{n} \cdot rot\vec{F} d\sigma.$

Вихрь поля вектора $\vec{F}$ равен $\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -z^2 & y^2 \end{vmatrix} = (2y + 2z)\vec{i}.$

Отсюда $Ц = \iint\limits_{\sigma} \vec{n}\vec{i}\,(2y + 2z)\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_{OCA}} \vec{n}\vec{i}\,(2y + 2z) d\sigma +$

$+ \iint\limits_{\sigma_{OAB}} \vec{n}\vec{i}\,(2y + 2z) d\sigma + \iint\limits_{\sigma_{OBC}} \vec{n}\vec{i}\,(2y + 2z) d\sigma.$

Вычислим каждый из этих интегралов по поверхности. При этом мы помним, что здесь $\vec{n}$ есть единичный вектор, направленный по нормали к соответствующей поверхности грани пирамиды.

На поверхности σ_{OCA} вектор $\vec{n} = \vec{j}$, поэтому $\vec{n}\vec{i} = \vec{j}\vec{i} = 0$, и, следовательно, интеграл по этой поверхности равен нулю.

На поверхности σ_{OAB} вектор $\vec{n} = \vec{k}$, поэтому $\vec{n}\vec{i} = \vec{k}\vec{i} = 0$, и, следовательно, интеграл по этой поверхности равен нулю.

На поверхности σ_{OBC} вектор $\vec{n} = \vec{i}$, поэтому $\vec{n}\vec{i} = \vec{i}\vec{i} = 1$. Тогда Ц = $\iint\limits_{\sigma_{OBC}} (2y + 2z) d\sigma = \iint\limits_{\sigma_{OBC}} (2y + 2z) dydz = \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^{2-z} (2y + 2z)\, dy = \frac{16}{3}.$

Результат тот же. Так и должно быть.

§7. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ.

Векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, заданное в области V, называется **потенциальным**, если в области V существует такая скалярная функция u, что вектор $\vec{a}$ можно представить в виде градиента этой функции:

$$\vec{a} = \text{grad u}. \qquad (7.1)$$

Функция u называется **потенциальной функцией** или **потенциалом векторного поля**. Для силовых полей функция u называется **силовой функцией**, а функция –u - **потенциалом**.)

Если векторное поле $\vec{a}$ потенциально в области V, то для его задания достаточно одной скалярной функции – потенциала этого поля, так как из формулы (7.1) следует, что в этом случае $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}, R = \frac{\partial u}{\partial z}$. Отсюда

$Pdx + Qdy + Rdz = du.$

Таким образом, если векторное поле $\vec{a}$ потенциально, выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ есть полный дифференциал потенциала этого поля. Критерий потенциальности векторного поля следует из теоремы:

Теорема 7.1. Для того, чтобы дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$, заданное в области V, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось условие

$$\text{rot } \vec{a} = 0. \qquad (7.2)$$

Следовательно, для того, чтобы векторное поле потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Выполнение условия (7.2) в области V приводит не только к потенциальности векторного поля, но и к следующим результатам.

1. В области V существует потенциал $u = u(x,y,z)$, который может быть определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого по формуле

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C. \qquad (7.3)$$

где $(x_0, y_0, z_0) \in V$ - любая фиксированная точка; (x, y, z) - переменная точка в области V; C – произвольная постоянная.

2. Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по произвольному замкнутому контуру $L \subset V$ равна нулю. Если же хотя бы в одной точке, внутренней по отношению к контуру L, поле $\vec{a}$ не определено, циркуляция по этому контуру может и не обратиться в нуль, хотя поле потенциально.

3. Для любых двух точек A и B в области V значение линейного интеграла векторного поля $\vec{a}$, т. е. $\int\limits_{AB} (\vec{a}, dr),$ не зависит от вида контура интегрирования AB, соединяющего точки A и B и расположенного в области V, а зависит только от положения этих точек в области.

4. Если $u(x,y,z)$ – потенциал векторного поля $\vec{a}$, то линейный интеграл этого поля вдоль любого контура $AB \subset V$, соединяющего точки $A(x_0,y_0,z_0)$ и $B(x_1,y_1,z_1)$, равен разности значений потенциала в конечной и начальной точках контура интегрирования:

$$W = \int\limits_{AB} (\vec{a}, dr), = u(x_1,y_1,z_1) - u(x_0,y_0,z_0). \qquad (7.4)$$

Физический смысл этого результата состоит в том, что если $\vec{a}$ - силовое поле, то разность потенциалов между точками B и A равна работе, которую поле совершает по перемещению материальной точки из A в B.

Задача 7.1. Установить потенциальность поля $\vec{a} = (3x^2y^2z^{-1} - 2x^3)\,\vec{i} +$

$+ (2x^3yz^{-1} + 3y^3)\,\vec{j} + (z^3 - x^3y^2z^{-2})\,\vec{k}$, найти его потенциал и вычислить линейный интеграл W поля вдоль контура L = AB, где A(1, 2, 2), B(1, 3, 1).

Решение. Данное векторное поле определено и дифференцируемо во всех точках пространства, за исключением точек плоскости $z = 0$, так как в этих точках координаты вектора $\vec{a}$ не определены. Исключив эти точки, получим неодносвязную область, в которой проекции вектора $\vec{a}$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные.

Так как rot $\vec{a} = 0$, данное поле является потенциальным там, где $z \neq 0$. Найдем потенциал поля по формуле (7.3), выбрав в качестве точки (x_0,y_0,z_0) точку (0, 0, 1): $u(x,y,z) =$

$$= -2\int\limits_0^x x^3dx + \int\limits_0^y (2x^3y + 3y^3)dy + \int\limits_1^z (z^3 - x^3y^2z^{-2})dz + C = -\frac{1}{2}x^4 + +\frac{3}{4}y^4 +$$

$+\frac{1}{4}z^4 + x^3y^2z^{-1} + C_1$, где $C_1 = C - \frac{1}{4}$ - произвольная постоянная.

Вычислим линейный интеграл W поля $\vec{a}$ вдоль линии AB от точки A(1, 2, 2) до точки B(1, 3, 1) по формуле (7.4):

$$W = \left(-\frac{1}{2}1^4 + \frac{3}{4}3^4 + \frac{1}{4}1^4 + 1^3 3^2 1^{-1} + C_1\right) - \left(-\frac{1}{2}1^4 + \frac{3}{4}2^4 + \frac{1}{4}2^4 + \right.$$

$$\left. + 1^3 2^2 2^{-1} + C_1\right) = 52$$

Следует отметить, что если точки A и B расположены по разные стороны плоскости $z = 0$, то формула (7.4) неприменима, так как на любой линии, соединяющей точки A и B, имеется такая точка, в которой поле $\vec{a}$ не определено.

Задача 7.2. Доказать, что плоское векторное поле $\vec{a} = x\ln(1+y^2)\vec{i}$ + + $yx^2(1 + y^2)^{-1}\vec{j}$ является потенциальным. Найти его потенциал и вычислить линейный интеграл W поля $\vec{a}$ от точки A(2, 3) до точки B(-4, 7).

Решение. Так как для данного поля $\vec{a}$ функции $P = x\ln(1+ +y^2)$ и $Q = yx^2(1 + y^2)$ определены и дифференцируемы в любой плоскости xOy и равенство rot $\vec{a} = 0$ выполняется тождественно, то поле $\vec{a}$ является потенциальным на плоскости xOy. Найдем потенциал поля , выбрав в качестве точки (x_0, y_0) начало координат:

$$u(x, y) = \int_0^x x\ln(1+y^2)\,|_{y=0}\, dx + \int_0^y yx^2(1+y^2)^{-1}dy + C =$$

$$= x^2\int_0^y y(1+y^2)^{-1}dy + C = \tfrac{1}{2}x^2\ln(1 + y^2) + C.$$

Линейный интеграл W поля $\vec{a}$ от точки A(2, 3) до точки B(-4, 7) вычислим по формуле (7.4): $W = \left(\frac{1}{2}(-4)^2\ln(1+7^2) + C\right) - \left(\frac{1}{2}2^2\ln(1+3^2) + C\right) =$

$= 2(4\ln50 - \ln10)$.

Задача 7.3. Показать, что поле $\vec{F} = (x^2 - 2yz)\vec{i} + (y^2 - 2xz)\vec{j} +$

$+ (z^2 - 2xy)\vec{k}$ является потенциальным. Найти его потенциал.

Решение. Находим rot $\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - 2yz & y^2 - 2xz & z^2 - 2xy \end{vmatrix} =$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(z^2 - 2xy\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2 - 2xz\right)\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(z^2 - 2xy\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 - 2yz\right)\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 - 2xz\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2yz\right)\right)\vec{k} = (-2x + 2x)\vec{i} - (-2y + 2y)\vec{j} +$$

$$+(-2z + 2z)\vec{k} = 0.$$

Следовательно, данное поле потенциальное.

Потенциал поля находим по формуле (7.3):

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x}\left(x^2 - 2y_0z_0\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(y^2 - 2xz_0\right)dy + \int_{z_0}^{z}\left(z^2 - 2xy\right)dz =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2xy_0z_0\right]_{x_0}^{x} + \left[\frac{1}{3}y^3 - 2xyz_0\right]_{y_0}^{y} + \left[\frac{1}{3}z^3 - 2xyz\right]_{z_0}^{z} =$$

$$= \tfrac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C,$$

где $C = -\frac{1}{3}x_0^3 - \frac{1}{3}y_0^3 - \frac{1}{3}z_0^3 + 2x_0y_0z_0$.

§ 8. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА.

Основные характеристики векторного анализа – градиент, дивергенция, ротор называются дифференциальными операциями первого порядка. Операции над ними удобно представить с помощью **оператора Гамильтона (оператора набла)**

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Справедливы следующие правила действий с оператором набла:

1. Произведение оператора ∇ на скалярную функцию $u = u(x, y, z)$ дает градиент этой функции:

$$\nabla u = \text{grad } u. \qquad (8.1)$$

2. Скалярное произведение оператора ∇ на векторную функцию $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ дает дивергенцию этой функции:

$$(\nabla, \vec{a}) = \text{div } \vec{a}. \qquad (8.2)$$

3. Векторное произведение оператора ∇ на векторную функцию $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ дает ротор этой функции:

$$[\nabla, \vec{a}] = \text{rot } \vec{a}. \qquad (8.3)$$

Если в области V заданы скалярное поле u и векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, причем функции u, P, Q, R дважды дифференцируемы в области V, то в этой области grad u и rot $\vec{a}$ представляют собой дифференцируемые векторные поля, а div $\vec{a}$ - дифференцируемое скалярное поле. В этом случае возможны следующие операции второго порядка в векторном анализе:

grad div $\vec{a}$; div grad u; div rot $\vec{a}$; rot grad u; rot rot $\vec{a}$.

С помощью оператора ∇ можно показать, что div rot $\vec{a}$ = 0 и rot grad u = 0.

Одной из основных операций второго порядка является div grad u. Кратко эту операцию обозначают Δ u, причем символ

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называют **оператором Лапласа**. Таким образом

$$\text{div grad } u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Уравнение Δu rot $\vec{a}$ = 0 или $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. = 0$ (8.4)

называется **уравнением Лапласа**, а его решение – **гармоническими функциями.** Скалярное поле $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющее уравнению (8.4), называется **гармоническим полем.**

Операции grad div $\vec{a}$ и rot rot $\vec{a}$ связаны между собой соотношением rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a}$ - $\Delta\vec{a}$,

где $\Delta\vec{a} = \Delta P\vec{i} + \Delta Q\vec{j} + \Delta R\vec{k}$ представляет собой вектор, проекции которого равны Δ P, Δ Q, Δ R (P, Q, R – проекции векторной функции $\vec{a}$).

Задача 8.1. Покпзать, что rot($u\vec{a}$) = [grad u, $\vec{a}$] + u rot $\vec{a}$, если u – скалярная функция, а $\vec{a}$ - векторная.

Решение. В символической записи на основании формулы (8.3) имеем rot($u\vec{a}$) = [∇,$u\vec{a}$]. Так как оператор ∇ стоит перед произведением функций u и $\vec{a}$, то, используя правило действия оператора на произведение функций, получаем

[∇, $u\vec{a}$] = [∇, $\overset{\downarrow}{u}\vec{a}$] + [$\nabla$,$u\overset{\downarrow}{\vec{a}}$], где символ $\downarrow$ указывает, на какой из сомножителей действует оператор ∇. В выражении [∇, $\overset{\downarrow}{u}\vec{a}$] оператор ∇ действует только на u, поэтому

[∇, $\overset{\downarrow}{u}\vec{a}$] = [$\nabla$ $\overset{\downarrow}{u}$,$\vec{a}$] = [∇ u,$\vec{a}$]. Здесь мы учли, что u является скалярной величиной, а значит, ее можно поставить в любое место. Однако она снабжена символом $\downarrow$, поэтому u нельзя выносить за знак оператора.

Рассматривая выражение [∇,$u\overset{\downarrow}{\vec{a}}$], мы можем скалярную величину u вынести за знак набла и за знак векторного произведения, что дает [∇,$u\overset{\downarrow}{\vec{a}}$] = u [∇,$\overset{\downarrow}{\vec{a}}$] = u [∇,$\vec{a}$]. Таким образом, [∇, $u\vec{a}$] = [∇u,$\vec{a}$] + u [∇, $\vec{a}$] или (по формулам (8.1), (8.3)) rot($u\vec{a}$) = [grad u, $\vec{a}$] + u rot $\vec{a}$.

Задача 8.2. Доказать с помощью оператора набла, что

div[$\vec{a}$, $\vec{b}$] = ($\vec{b}$,rot $\vec{a}$) – ($\vec{a}$, rot$\vec{b}$).

Решение. Учитывая формулу (8.2) и то, что оператор ∇ действует на произведение двух функций как обычный оператор дифференцирования, имеем

$$\mathrm{div}[\vec{a},\vec{b}] = [\vec{a},(\nabla,\vec{b}]) = (\nabla,[\overset{\downarrow}{\vec{a}},\vec{b}]) + (\nabla,[\vec{a},\overset{\downarrow}{\vec{b}}]).$$

Слагаемые в правой части равенства представляют собой смешанное произведение трех векторов ∇, $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Воспользовавшись свойством смешанного произведения, получим $(\nabla,[\overset{\downarrow}{\vec{a}},\vec{b}]) = -(\nabla,[\vec{b},\overset{\downarrow}{\vec{a}}]) =$

$= (\vec{b},[\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{a}}]) = (\vec{b},[\nabla,\vec{a}]) = (\vec{b},\ \mathrm{rot}\ \vec{a})$;

$(\nabla,[\vec{a},\overset{\downarrow}{\vec{b}}]) = -(\vec{a},[\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{b}}]) = -[\vec{a},(\nabla,\vec{b}]) - (\vec{a},\ \mathrm{rot}\vec{b})$.

Таким образом, $\mathrm{div}[\vec{a},\vec{b}] = (\vec{b},\mathrm{rot}\ \vec{a}) - (\vec{a},\ \mathrm{rot}\vec{b})$.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Поверхности уровня. Производная по направлению. Градиент функции. 3
2. Векторное поле. Векторные линии и их дифференциальные уравнения. 9
3. Поток векторного поля. Способы вычисления потока через незамкнутую поверхность. 11
4. Дивергенция векторного поля. Формула Остроградского. 18
5. Циркуляция векторного поля и линейный интеграл. 21
6. Ротор векторного поля. Формула Стокса. 25
7. Потенциальное векторное поле. 31
8.Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа. 35