ДОРОХОВ. В. М.

Курс лекций по математическому анализу. 2-ой семестр. Бакалавриат. 4-й факультет.

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лекция 1. Основные определения. Приращения. Непрерывность.

1^0. Основные понятия.

До сих пор мы рассматривали функции одной переменной. Однако при изучении многих явлений приходится встречаться с функциями двух, трех и более переменных.

Примеры. 1. $S = xy$. (Площадь прямоугольника).

2. $V = xyz$. (Объем параллелепипеда).

3. $I = \frac{U}{R}$. (Сила тока в цепи (Закон Ома)).

Определение 1. Если каждой паре (x,y) значений двух, независимых друг от друга переменных величин X и Y, из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины Z, то мы говорим, что задана функция двух независимых переменных величин, определенная в области D.

Обозначения: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ и т.д..

Функции двух переменных можно задавать аналитически и таблично. При проведении экспериментов получается только табличное задание.

Пример табличного задания функции $S = xy$.

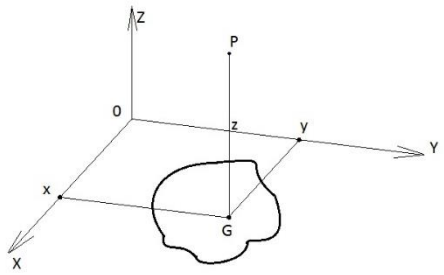
y \ x	0	1	1.5	2	3
1	0	1	1.5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4.5	6	8
4	0	4	6	8	12

Как и функция одной переменной функция двух переменных существует, вообще говоря, не для любых значений x и y.

Определение 2. Совокупность пар (x,y) значений X и Y , при которых определяется функция $z = f(x, y)$, называется область определения функции двух переменных.

Геометрически область определения изображается множеством точек плоскости. В частности – вся плоскость или часть плоскости, ограниченная линиями.

Линии, ограничивающие область определения, называются границами области. Точки области определения, не лежащие на границе, называются внутренними точками области.



Если границы входят в область определения, то область замкнутая. Если не входят – открытая.

Примеры: Найти области определения следующих функций:

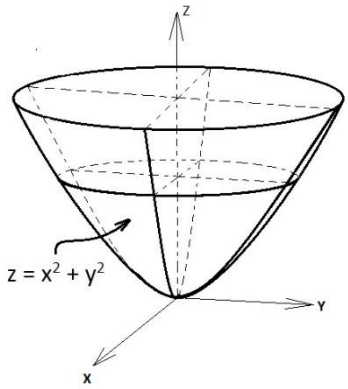
1. $z = 2x - y$
2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
3. $z = \ln(x + y)$

Определение функции двух переменных можно обобщить на случай трех и более переменных.
Сформулируйте самостоятельно определения функции трех переменных, n переменных.
Что будет представлять собой область определения функции трех переменных?

2^0. Геометрическое изображение функции двух переменных.

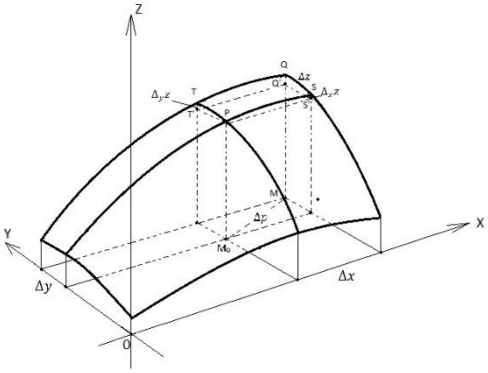
Рассмотрим функцию z=f(x, y), определенную в области D.
$P(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0,y_0)$.
Геометрическое место точек (x,y,z), координаты которых удовлетворяют уравнению z = f(x,y), называется графиком функции двух переменных.
В частном случае это поверхность в трехмерном пространстве.

Пример: $z = x^2 + y^2$



Что можно сказать о графиках функций трех и более переменных?

3⁰. Частные и полное приращения функции двух переменных.



Рассмотрим функцию z=f(x, y). Положим y = const. Тогда частное приращение функции по x находится так: $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$. Если положить x = const, то частное приращение по y находится по формуле:
$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Полное приращение ищется так: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Легко показать, что полное приращение не равно сумме частных, то есть, что

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

Пример.



Пример. Вычислить частные и полное приращения функции $z = x^2 + xy + y^2 + 3$ при изменении x от 2 до 2,1, y от 1 до 1,2.

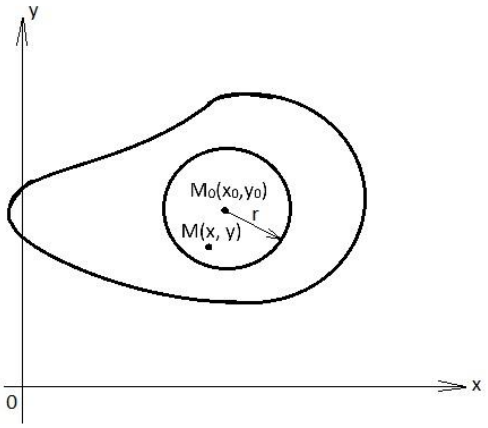
$$f(2{,}1) = 2^2 + 2\cdot 1 + 1^2 + 3 = 10$$
$$\Delta_x z = 2{,}1^2 + 2{,}1\cdot 1 + 1^2 + 3 - 10 = 0{,}51$$
$$\Delta_y z = 2^2 + 2\cdot 1{,}2 + 1{,}2^2 + 3 - 10 = 0{,}84$$

$$\Delta z = 2{,}1^2 + 2{,}1\cdot 1{,}2 + 1{,}2^2 + 3 - 10 = 1{,}37$$

4^0. Непрерывность функций нескольких переменных.

Определение. Окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0) + (y - y_0)} < r$, то есть совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Если мы говорим, что функция f(x, y) обладает некоторым свойством вблизи точки (x_0, y_0), или в окрестности точки (x_0, y_0), то это значит, что найдется такой круг с центром в точке (x_0, y_0), во всех точках которого функция обладает указанным свойством.



Пусть дана функция z=f(x, y), определенная в некоторой области G плоскости x0y. Рассмотрим точку $M_0(x_0,y_0)$, расположенную в области G или на ее границе.

Определение. Число A называется пределом функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0,y_0)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек M(x, y), для которых выполняется неравенство $|MM_0| < r$, имеет место неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$. Записывается это так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A.$$

Определение. Пусть $M_0(x_0,y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y).

Функция z=f(x, y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0,y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0), \qquad (*)$$

причем M(x, y) стремится к $M_0(x_0,y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Пусть $x = x_0 + \Delta x$; $y = y_0 + \Delta y$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\right] = 0$$

Обозначим $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0} \Delta z = 0$. (**)

Определение. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Если равенство (*) не выполняется, то функция в данной точке терпит разрыв.

1). z=f(x, y) определена во всех точках некоторой области, за исключением точки $M_0(x_0,y_0)$.

2). Не существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$

3). $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$

Лекция 2. Частные производные и их геометрический смысл. Полное приращение и полный дифференциал. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

5^0. Частные производные функции нескольких переменных.

Определение. $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$.

Обозначения: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x ; $f'_x(x,y)$; $\frac{\partial f}{\partial x}$;

Определение. $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$.

Правила вычисления остаются те же, что и при вычислении обычных производных. Просто если мы вычисляем производную по одной переменной, то ко всем остальным относимся как к константам.

Примеры: 1. $z = x^2 \sin y$.
2. $z = x^y$.
3. $u = x^2 + y^2 + xtz^3$

6^0. Полное приращение и полный дифференциал.

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Пусть в рассматриваемой точке частные производные непрерывны. Прибавим и отнимем $f(x, y + \Delta y)$

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

По теореме Лагранжа $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \cdot \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}$,

где $x < \bar{x} < x + \Delta x$.

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \cdot \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y},$$

где $y < \bar{y} < y + \Delta y$.

Следовательно, $\Delta z = \Delta x \cdot \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}$.

Так как частные производные непрерывны, то

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, следовательно, по теореме о связи функции с ее пределом, имеем

$\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \alpha_1$ и $\frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \alpha_2$, где α_1 и α_2 - бесконечно малые величины. Тогда полное приращение можно переписать в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y.$$

Первые два слагаемые, образующие главную часть приращения, называются полным дифференциалом dz. Таким образом

$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y$

Легко показать, что $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$ и тогда $dz = f_x^{/} dx + f_y^{/} dy$.

Понятно, что $\Delta z \approx dz$.

Пример: Найти полный дифференциал функции $z = x^3 y^2 + e^{xy}$.

7. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.

Пусть функция z = f(x, y) дифференцируема в точке (x_0, y_0).

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, следовательно,
$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta z$, то есть $\Delta z \approx dz$.

$dz = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \Delta y$, следовательно,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \Delta y.$$

Пример: Вычислить приближенное значение $1{,}08^{3{,}96}$.

Лекция 3. Частные производные высших порядков. Равенство $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

8^0. Частные производные высших порядков.

Пусть z = f(x, y). $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ сами, вообще говоря, являются функциями двух переменных. Следовательно:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ - два раза по x.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ - сначала по x, потом по y.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ - сначала по y, потом по x.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ - два раза по y.

Вторых производных четыре штуки.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}; \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}; \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}; \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}; \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Производных третьего порядка - 8 штук.

Вообще, частная производная n-ого порядка есть производная от производной

(n – 1) порядка. Например $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ Сначала n раз берется производная по x, а потом (n-p) раз берется производная по y.

Примеры: 1**.** Найти все производные второго порядка для функции f(x< y) = $x^3y + y^3$.

2. Для функции $z = y^2e^x + x^2y^3 + 1$ найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$**.**

Зависит ли результат дифференцирования функции нескольких переменных от порядка дифференцирования по разным переменным, то есть будут ли равны $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

или $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial t}$ и $\frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y \partial x}$?

Место для формулы.

9^0. Равенство $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$**.**

Теорема: Если функция z=f(x, y) и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} определены и непрерывны в точке M(x, y) и в некоторой ее окрестности, то в этой точке $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Доказательство: Рассмотрим выражение

A = $[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)] - [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]$.

Если ввести вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$,

то A = $\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$.

Так как по предположению f'_x определена в окрестности точки M(x, y), то, следовательно, дифференцируема на $[x, x+\Delta x]$. Тогда по теореме Лагранжа

A = $\Delta x \cdot \varphi'(\bar{x})$, где $x < \bar{x} < x + \Delta x$.

Но $\varphi'(\bar{x}) = f(\bar{x},\ y+\Delta y) - f'(\bar{x},\ y)$.

Так как f''_{xy} определена в точке M(x, y), то f'_x дифференцируема на отрезке $y, y+\Delta y]$

Следовательно, по теореме Лагранжа $f(\bar{x},\ y+\Delta y) - f^{-}(\bar{x},\ y) = \Delta y \cdot f''_{xy}$ (x', y'), где

$y < \bar{y} < y + \Delta y$. Итак

A = $\Delta x \Delta y \cdot \quad f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})$ (1)

Переставим в A средние слагаемые:

A = $[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] - [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)]$.

Введем вспомогательную функцию $\psi(y) = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$, следовательно,

A = $\psi(y+\Delta y) - \psi(y)$. По теореме Лагранжа A = $\Delta y \psi'(\bar{\bar{y}})$, где $y < \bar{\bar{y}} < y + \Delta y$.

Но $\psi'(\bar{\bar{y}}) = f'(x+\Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'(x, \bar{\bar{y}})$ = (еще раз теорема Лагранжа) = $\Delta x\ f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$

A = $\Delta y\ \Delta x\ f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ (2)

Левые части формул (1) и (2) равны, следовательно, $f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})$

Перейдя в этом равенстве к пределам при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, получим

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Следствие: Если частные производные $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ и $\dfrac{\partial^n z}{\partial y^{n-p} \partial x^p}$

непрерывны,

то они равны.

Пример: U = $e^{xy} \sin z$. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ и $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$.

Лекция 4. Производная сложной функции. Полная производная. Полный дифференциал. Производные от функций, заданных неявно.

10^0. Производная сложной функции. Полная производная. Полный дифференциал.

Пусть в уравнении $z = F(U,V)$ (1)

$U = \varphi(x,y)$ и $V = \psi(x,y)$ (2)

В этом случае z является сложной функцией, зависящей от x и y.

Пусть F, φ, ψ имеют непрерывные частные производные по своим аргументам.

Найдем $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Дадим x приращение Δx, $y = const$. Тогда U и V получат приращения $\Delta_x U$ и $\Delta_x V$. Следовательно, функция $z = F(U,V)$ получит приращение Δz:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial U}\Delta_x U + \frac{\partial F}{\partial V}\Delta_x V + \gamma_1 \Delta_x U + \gamma_2 \Delta_x V$$

Разделим все почленно на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial F}{\partial U}\frac{\Delta_x U}{\Delta x}+\frac{\partial F}{\partial V}\frac{\Delta_x V}{\Delta x}+\gamma_1\frac{\Delta_x U}{\Delta x}+\gamma_2\frac{\Delta_x V}{\Delta x}$$

Если $\Delta x\to 0$, то $\Delta_x U\to 0$ и $\Delta_x V\to 0$ в силу непрерывности функций U и V.

$\gamma_1\to 0$ и $\gamma_2\to 0$. Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}$$

Аналогично получим $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial y}$

Пример: $z=\ln(U^2+V^2)$, где $U=e^{x+y^2}$, $V=x^2+y$.

Если $z=F(U,V,t)$, где $U=U(x,y)$, $V=V(x,y)$, $t=t(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$$

Если $z=F(U,V,x)$,где $U=U(x)$, $V=V(x)$, то мы получим полную производную:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial U}\frac{dU}{dx}+\frac{\partial F}{\partial V}\frac{dV}{dx}+\frac{\partial F}{\partial x}$$

Пример: $\boldsymbol{z=x^2+\sqrt{y}}$ **,** где $y=\sin x$.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=2x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\cos x=2x+\frac{\cos x}{2\sqrt{y}}$$

Найдем полный дифференциал.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (*)$$

Если $z=F(U,V)$, $U=\varphi(x,y)$ и $V=\psi(x,y)$, то

$$dz=\left(\frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy$$

$$dz = \frac{\partial F}{\partial U}\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial F}{\partial V}\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy\right) \quad \text{или}$$

$$dz = \frac{\partial F}{\partial U}dU + \frac{\partial F}{\partial V}dV \quad \text{или} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial U}dU + \frac{\partial z}{\partial V}dV \qquad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), видим инвариантность формы дифференциала.

Пример: Найти dz, если $z = U^2V^3$, где $U = x^2 sin y,\ V = x^3 e^y$.

11^0. Производные от функций, заданных неявно.

Рассмотрим неявно заданную функцию $F(x, y) = 0$.

Теорема: Пусть непрерывная функция y, зависящая от x, задана неявно формулой

$$F(x, y) = 0\ , \qquad (1)$$

где $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ - непрерывные функции в некоторой области D,

содержащей точку (x, y), координаты которой удовлетворяют уравнению (1). Кроме того,

в этой точке $F'_y(x, y) \neq 0$. Тогда $y'_x = -\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ (2)

Доказательство. Дадим x приращение Δx. Тогда y получит приращение Δy.

$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$, следовательно $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0$.

Выражение, стоящее справа от знака равенства, есть полное приращение. То есть,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0$$

Полученное равенство разделим почленно на Δx:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x}+\gamma_1+\gamma_2\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\gamma_2}$$

Перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $y'_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

Пример: $x^2+y^2-1=0$

Пусть $F(x,y,z)=0$ (3)

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Если ищем $\frac{\partial z}{\partial x}$, то $y=const$. Поэтому применима формула(2):

$z'_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Аналогично $z'_y=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Пример: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2z\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z}$$

Лекция 5. Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

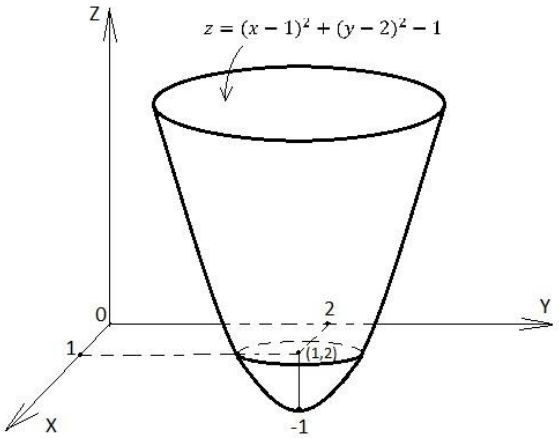
12. Экстремум функции двух переменных. Необходимое условие существования экстремума.

Определение 1. Функция z = f(x, y) имеет максимум в точке $M_0(x_0,y_0)$,если $f(x_0,y_0) > f(x,y)$ для всех точек (x,y) достаточно близких к точке (x_0,y_0) и отличных от нее.

Определение 2. Функция z = f(x, y) имеет минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, если $f(x_0,y_0) < f(x,y)$ для всех точек (x,y) достаточно близких к точке (x_0,y_0) и отличных от нее.

Максимум и минимум называются экстремумами функции.

Пример. $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$



Теорема. Если z = f(x, y) достигает экстремума в точке $M_0(x_0,y_0)$, то каждая частная

производная первого порядка от z или обращается в ноль в этой точке или в этой точке не существует.

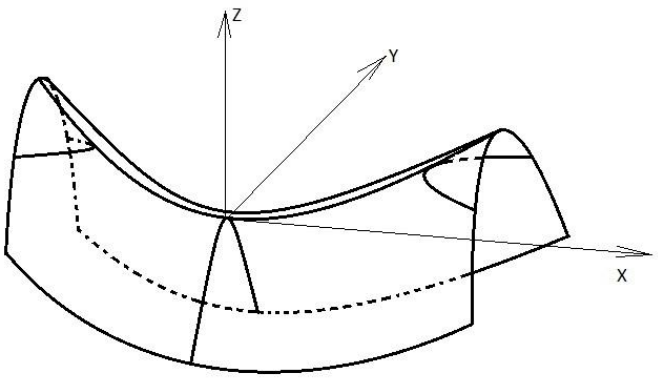
Доказательство. Пусть $y = y_0$. Тогда f(x, y) есть функция одной переменной. Так как в

точке $x = x_0$ она имеет экстремум, то следовательно $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0$ или не

существует.

Аналогично при $x=x_0$.

Эта теорема не является достаточной. Можно привести примеры, когда производные равны нулю, однако экстремума нет: $z = x^2 - y^2$



$z'_x = 2x \quad z'_y = 2y$ Тогда $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Точки, в которых частные производные первого порядка равны нулю или не существуют,

называются критическими точками. Если функция имеет экстремум, то он может быть только в критических точках.

13. Достаточные условия существования экстремума.

Теорема. Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, функция f(x, y)

имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Пусть

точка $M_0(x_0,y_0)$ является критической точкой функции f(x, y), то есть $f_x'(x_0, y_0) = 0$ и

$f_y'(x_0, y_0) = 0$. Обозначим $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = C$

Тогда: 1). Функция имеет максимум, если $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$.

2). Функция имеет минимум, если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$.

3). Функция не имеет экстремума, если $AC - B^2 < 0$.

4). Если $AC - B^2 = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть. Нужно

дополнительное исследование.

(Без доказательства).

Примеры. 1. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

$x_0 = -\frac{4}{3}$; $y_0 = \frac{1}{3}$; $z_{min}\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

2. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ $z_{min}(1; 1) = -1$ В точке (0;0) экстремума нет.

14. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.

Наибольшее и наименьшее значения есть самое большое и самое маленькое значения функции в этой области.

Наибольшее и наименьшее значения нельзя смешивать с максимумом и минимумом функции, которые являются наибольшим и наименьшим значениями *только* по сравнению с соседними точками.

Функция f(x, y), непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области D, обязательно имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри области D, или в точках, лежащих на границах области D.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений.

1). Найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках, не вдаваясь в исследование, будет ли в этих точках экстремум и какого вида.

2). Найти наибольшее и наименьшее значения функции на границах области D.

3). Сравнить полученные значения и выбрать наибольшее и наименьшее.

15. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Пусть имеем поверхность F(x,y,z) = 0.

Определение 1. Прямая линия называется касательной к поверхности в некоторой точке P(x,y,z), если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на этой поверхности и проходящей через точку P.

Так как через точку P проходит бесчисленное множество кривых, лежащих на поверхности, то и касательных бесчисленное множество.

Если в точке P(x,y,z) все три производные F'_x, F'_y, F'_z равны нулю или хотя бы одна не существует, то точка P называется особой точкой поверхности.

Если же все три производные существуют и непрерывны, причем хотя бы одна из них не равна нулю, то точка P – обыкновенная точка поверхности.

Теорема. Все касательные прямые к данной поверхности в ее обыкновенной точке лежат в одной плоскости.

Определение 2. Плоскость, в которой расположены все касательные прямые, называется касательной плоскостью.

Можно показать, что вектор $\vec{N} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}(P); \frac{\partial F}{\partial y}(P); \frac{\partial F}{\partial z}(P) \right\}$

перпендикулярен касательной плоскости. Тогда уравнение касательной плоскости в точке P имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) \cdot (x - x_p) + \frac{\partial F}{\partial y}(P) \cdot (y - y_p) + \frac{\partial F}{\partial z}(P) \cdot (z - z_p) = 0$$

Определение 3. Прямая, проведенная через точку P(x,y,z) перпендикулярно к касательной плоскости, называется нормалью.

Уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{x - x_p}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)} = \frac{y - y_p}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)} = \frac{z - z_p}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}$$

Пример. $X^2 + y^2 + z^2 = 14$ P(1;2;3)

Лекция 6. Скалярное поле. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению. Градиент и его связь с производной по направлению.

16. Скалярное поле. Линии и поверхности уровня.

Пусть в трехмерном пространстве имеется область D, В которой задана функция

U = U(x, y, z). В этом случае говорят, что в области D задано скалярное поле.

Если, например, U(x, y, z) обозначает температуру в точке M(x, y, z) , то говорят, что задано поле температур. Если область D заполнена газом или жидкостью, то поле давлений и так далее.

Рассмотрим точки области D, в которых U(x, y, z) = C. Совокупность таких точек образует некоторую поверхность, которая называется поверхностью уровня.

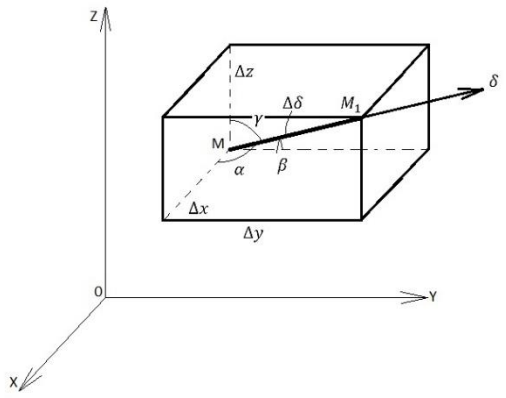
Пример. U(x, y, z) = $x^2 + y^2 + z^2$ Поверхность уровня $x^2 + y^2 + z^2 = C$ (сфера).

Если функция U есть функция двух переменных , то есть U = U(x, y), то "поверхностями" уровня будут линии на плоскости Oxy: U(x, y) =C. Это линии уровня.

Если значения U мы будем откладывать по оси oz: z = U(x, y), то линиями уровня на плоскости Oxy будут проекции линий, которые получаются в пересечении поверхности

z = U(x, y) с плоскостями z = C. Зная линии уровня, легко исследовать характер поверхности z = U(x, y). Это используют, например, в географии.

17. Производная по направлению.



Рассмотрим в области D функцию U = U(x, y, z) и точку M(x, y, z). Проведем из точки M

вектор $\vec{S}$, направляющие косинусы которого $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$. На векторе $\vec{S}$ на расстоянии Δs от его начала рассмотрим точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

Пусть функция U = U(x, y, z) непрерывная и имеет непрерывные частные производные по своим аргументам в области D. Тогда полное приращение функции имеет вид:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

(1)

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$ при $\Delta s \to 0$.

Разделим (1) на Δs :

$$\frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s} \qquad (2)$$

Очевидно, что $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta$, $\frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$. Тогда

$$\frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \varepsilon_3 \cos\gamma \qquad (3)$$

Предел отношения $\frac{\Delta U}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ называется производной функции U = U(x, y, z)

в точке M(x, y, z) по направлению вектора $\vec{S}$ и обозначается $\frac{\partial U}{\partial S}$.

Таким образом $$\frac{\partial U}{\partial S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta S} \qquad (4)$$

Перейдя в равенстве (3) к пределу, получим:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma \qquad (5)$$

Из формулы (5) следует, что зная частные производные легко получить производную по любому направлению.

Сами частные производные являются частным случаем производной по направлению.

Так, например, при $\alpha = 0;\ \beta = \frac{\pi}{2};\ \gamma = \frac{\pi}{2}$ имеем $\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial x}$

Пример. Дана функция $U = x^2 + y^2 + z^2$. Найти производную по направлению вектора

$\vec{S} = 2i + j + 3k$ в точке M(1; 1; 1). Ответ: $\frac{12}{\sqrt{14}}$.

18. Градиент и его связь с производной по направлению.

В каждой точке области D, в которой задана функция U(x, y, z), определим вектор, проекциями которого на оси координат являются частные производные $\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}$

в соответствующей точке grad U = $\frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k$

Этот вектор называется градиентом функции U(x, y, z). В этом случае говорят, что в области D задано поле градиентов.

Теорема. Пусть дано скалярное поле U(x, y, z) и в нем определено полк градиентов

grad U = $\frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k$. Производная $\frac{\partial U}{\partial S}$ по направлению вектора $\vec{S}$ равняется проекции вектора grad U на вектор $\vec{S}$, то есть $Пр_s$ grad U = $\frac{\partial U}{\partial S}$.

Доказательство. Рассмотрим единичный вектор $\vec{S}^0$, соответствующий вектору $\vec{S}$

$$\vec{S}^0 = \cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k$$

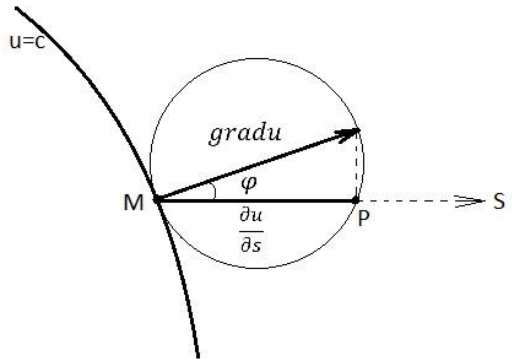
Скалярное произведение grad U$\cdot \vec{S}^0$ = = $\frac{\partial U}{\partial x} cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y} cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z} cos\,\gamma = \frac{\partial U}{\partial S}$

Пусть угол φ это угол между grad U и $\vec{S}^0$. Тогда $\left|gradU\right| \cdot \left|S^0\right| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial U}{\partial S}$.

Так как $\left|S^0\right| = 1$, то $\left|gradU\right| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial U}{\partial S}$, то есть $Пр_{s^0} gradU = \frac{\partial U}{\partial S}$, что и требовалось доказать.

На основании этой теоремы наглядно установить связь между градиентом и производной по направлению.

MP = $\left|gradU\right| \cdot \cos\varphi$



Очевидно, что при изменении направления вектора $\vec{S}$ на противоположное производная изменит знак, а ее абсолютная величина останется прежней.

Свойства градиента.

1). Производная в данной точке по направлению вектора $\vec{S}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\vec{S}$ совпадает с направлением grad U. Это наибольшее значение равно $\left|gradU\right|$.

Доказательство. Имеем $\left|gradU\right|\cdot\cos\varphi=\frac{\partial U}{\partial S}$. Если $\varphi=0$, то $\left|gradU\right|=\frac{\partial U}{\partial S}$

2). Производная по направлению вектора перпендикулярного к grad U, равна 0, так как в этом случае $\cos\varphi=0$.

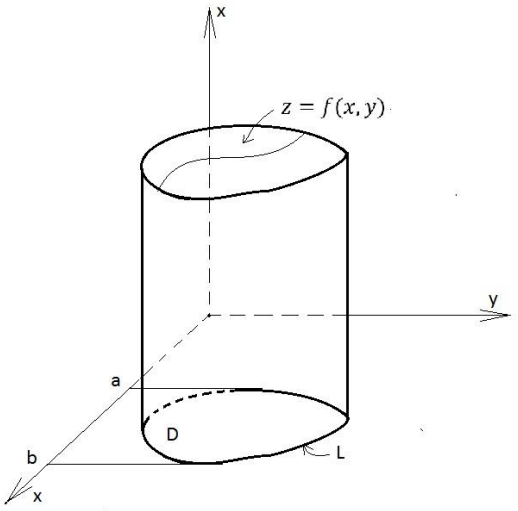
Пример. Найти градиент функции $U = x^2 + y^2 + z^2$ в точке M(1; 1; 1).

grad U(M) = 2i + 2j + 2k. Производная по направлению градиента равна $2\sqrt{3}$ и равна $\left|gradU\right|$.

Кратные и криволинейные интегралы.

Лекция 7. Определение двойного интеграла и его вычисление.

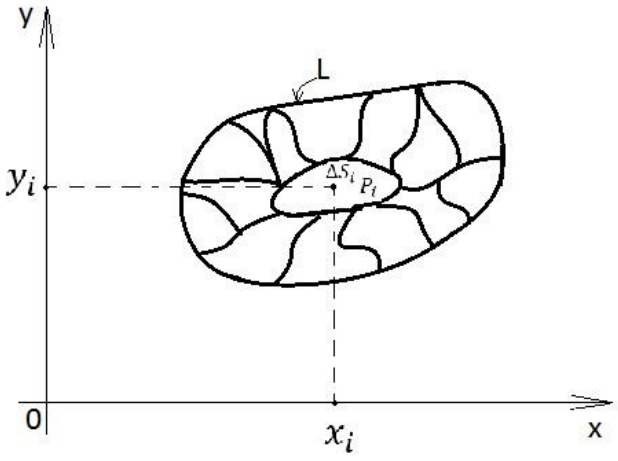
1^0. Объем цилиндрического тела.



Определение. Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, ..., \Delta S_i, ..., \Delta S_n$ (1)

Тогда площадь всей плоской фигуры D равна $S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$

Через границу каждой элементарной площадки $\Delta S_i (i = 1, 2, ..., n)$ проведем цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси OZ. Эта цилиндрическая поверхность вырежет из цилиндрического тела элементарный цилиндр объемом ΔV_i покрытый



сверху частью поверхности $z = f(x, y)$. Всего получим n элементарных цилиндров, которые в совокупности составят все цилиндрическое тело. Поэтому его объем $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$.

Для вычисления объема ΔV_i выберем в каждой площадке $\Delta S_i (i = 1, 2, ..., n)$ произвольным образом точку $P_i(x_i, y_i)$. Восстановим в ней перпендикуляр, который пересечет поверхность $z = f(x, y)$ в точке $z = f(P_i)$. Пусть на каждой из площадок $\Delta S_i (i = 1, 2, ..., n)$ Значение

$z = f(x, y)$ постоянно и равно $z = f(P_i)$. Тогда вместо элементарного цилиндра с криволинейным верхним основанием получим прямой цилиндр, объем которого будет равен

$f(P_i)\cdot\Delta S_i$. Следовательно, объем всего цилиндрического тела

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i \quad (2)$$

Определение. Диаметром области называется наибольшее из возможных расстояний между всеми точками ее границы (наибольшая из всех возможных ее хорд).

Обозначим через *d* наибольший из диаметров d_i элементарных площадок $\Delta S_i (i = 1,2,...,n)$.

Перейдя в равенстве (2) к пределу при $d \to 0$ и $n \to \infty$ получим объем рассматриваемого тела:

$$V = \lim_{\substack{d\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i$$

2^0. Определение двойного интеграла и условия его существования.

Пусть в замкнутой ограниченной области D задана функция $z = f(x,y)$ двух независимых переменных.

1). Разобьём данную область D произвольным образом на n элементарных площадок с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, ..., \Delta S_i, ..., \Delta S_n$. Их сумма равна площади S всей области D

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i .$$

2). На каждой из площадок произвольным образом выберем точки $P_i(x_i, y_i)$.

3). Составим n произведений $f(P_i)\cdot\Delta S_i \quad (i = 1,2,...,n)$.

4). Просуммируем полученные произведения $V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i$. Эта сумма называется двумерной интегральной суммой для функции $z = f(x,y)$ в области D.

Рассмотрим $\lim\limits_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} V_n = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i$, где d наибольший из диаметров d_i элементарных площадок $\Delta S_i (i = 1,2,...,n)$. Если этот предел не зависит от способа разбиения области D на части и от выбора точек $P_i(x_i, y_i)$ на каждом из участков, то этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается символом $\iint\limits_D f(x, y)dS$. Здесь

$f(x, y)$ - подынтегральная функция; dS - элемент площади произвольной формы. Так как предел не зависит от способа разбиения области D на части, то удобнее разбить область D линиями, параллельными координатным осям. Мы получим прямоугольники со сторонами

Δx_i и Δy_i. Тогда $dS = dx\cdot dy$. И двойной интеграл приобретает вид $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Очевидно, что интегрируемая функция должна быть ограниченной в замкнутой области D.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то двойной интеграл по

области D существует. Другими словами, непрерывная в области D функция всегда интегрируема.

Геометрический смысл двойного интеграла состоит в том, что он определяет объем цилиндрического тела.

3^0. Свойства двойного интеграла.

1. Двойной интеграл от алгебраической суммы двух функций по области D равен сумме двух двойных интегралов по области D от каждой функции в отдельности.

$$\iint\limits_D \left[\varphi(x, y) \pm \psi(x, y)\right]dxdy = \iint\limits_D \varphi(x, y)dxdy \pm \iint\limits_D \psi(x, y)dxdy$$

Свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых. Доказательство основано на определении двойного интеграла и теоремы о переходе к пределу в сумме двух функций.

2. Если функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ интегрируемы в области D, то произведение этих функций тоже интегрируемо в области D.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.

$$\iint\limits_D cf(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

4. Свойство аддитивности. Если область D разбита некоторой кривой на области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, и функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy\,.$$

5. Если $f(x,y)=1$, то $\iint\limits_D dxdy = S$, где S площадь области D.

Это свойство позволяет с помощью двойного интеграла находить площади плоских фигур произвольной формы.

6. Интегрирование неравенств (свойство монотонности двойного интеграла).

Если функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ интегрируемы в области D и всюду в этой области

$$\varphi(x,y) \le \psi(x,y), \text{ то } \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy \le \iint\limits_D \psi(x,y)dxdy$$

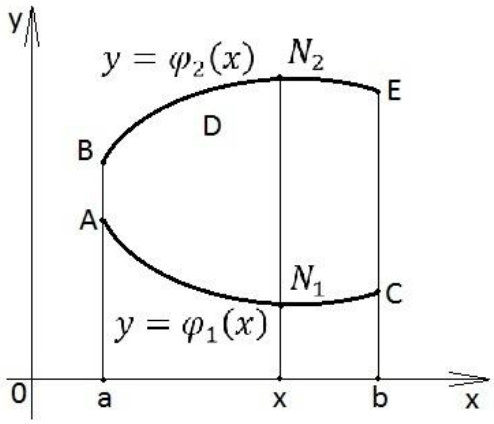
7. Теорема о среднем.

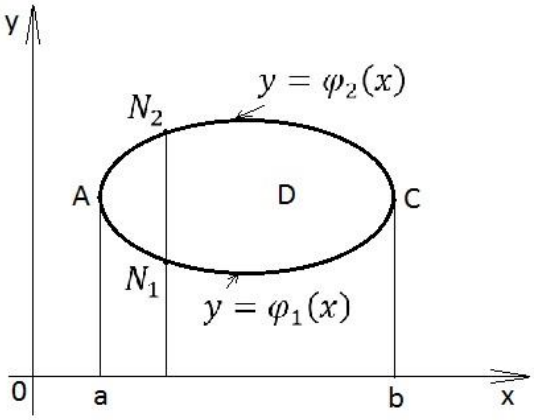
Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D с площадью S, то в этой области существует точка $P(\xi,\eta)$ такая, что $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(P)\cdot S$

4^0. Правильные области интегрирования.

Рассмотрим на плоскости ХОУ замкнутые области D специального вида, форма которых должна удовлетворять определенным условиям. Эти области называются правильными. Методы вычисления двойных интегралов базируются на понятии правильной области.

Область, правильная в направлении оси ОУ.



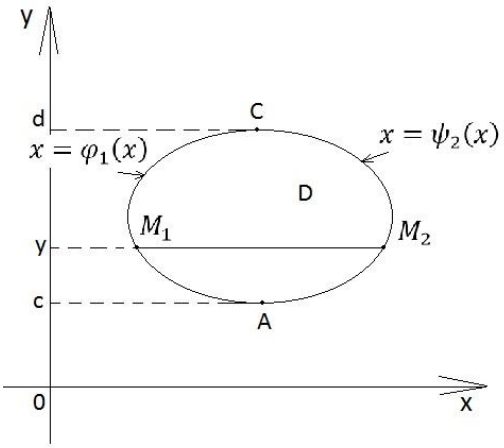


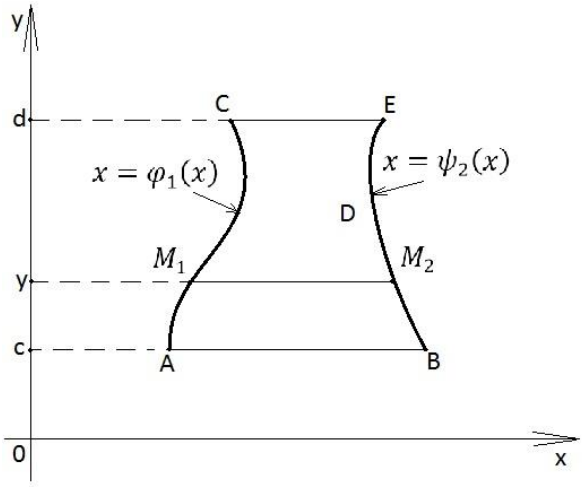
Замкнутую область D будем называть правильной в направлении оси ОУ, если: 1). Всякая прямая N_1N_2, параллельная оси ОУ и проходящая через внутреннюю точку области D, пересекает границы области не более чем в двух точках; 2). Область D ограничена снизу одной линией $y = \varphi_1(x)$, сверху одной линией $y = \varphi_2(x)$, причем обе эти функции непрерывны на отрезке $[a,b]$ и их значения удовлетворяют неравенству $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ при $x \in [a,b]$; 3). Слева по отношению к прямой N_1N_2 она ограничена отрезком АВ прямой $x = a$, справа отрезком СЕ прямой $x = b$.

Возможны предельные случаи, когда один из отрезков АВ или СЕ или оба сразу вырождаются в одну точку.

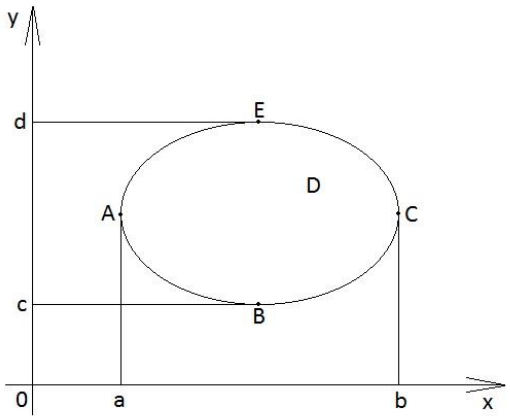
Область, правильная в направлении оси ОХ.

Замкнутую область D будем называть правильной в направлении оси OX, если: 1). Всякая прямая M_1M_2 , параллельная оси OX и проходящая через внутреннюю точку области D, пересекает границы области не более чем в





двух точках; 2). Область D ограничена слева одной линией $x=\psi_1(y)$, справа одной линией $x=\psi_2(y)$, причем обе эти функции непрерывны на отрезке $[c,d]$ и их значения удовлетворяют неравенству $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ при $y\in[c,d]$; 3). Снизу по отношению к прямой M_1M_2 она ограничена отрезком AB прямой $y=c$, справа отрезком CE прямой $y=d$.



Возможны предельные случаи, когда один из отрезков AB или CE или оба сразу вырождаются в одну точку.

Область, правильная как в направлении оси OX, так и в направлении оси OУ, называется просто правильной областью.

5^0. Двукратные (повторные) интегралы и их связь с двойными. Вычисление двойных интегралов.

Предположим, что функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, правильной в направлении оси OУ. Рассмотрим выражение $\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$, которое будем называть двукратным

(повторным) интегралом от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной в направлении оси ОУ области D. Интеграл в круглых скобках будем называть внутренним интегралом, а определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования будем называть внешним интегралом.

Сначала вычисляется внутренний интеграл при постоянном значении x. Получается функция, зависящая от x. Потом от нее берется внешний интеграл. В результате получается число. Аналогично определяется двукратный (повторный) интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной в направлении оси OX области D:

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

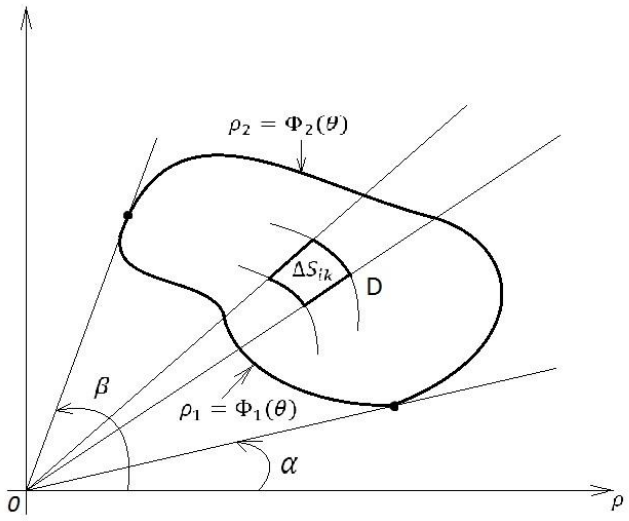
Теорема . Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной области D равен двукратному интегралу от этой функции по области D. То есть $\iint_D f(x,y)dxdy =$

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Эта теорема позволяет вычисление двойного интеграла свести к вычислению двукратного интеграла.

Лекция 8. Двойной интеграл в полярных координатах. Тройной интеграл и его вычисление. Механические приложения кратных интегралов.

6^0. Двойной интеграл в полярных координатах.



Правильной областью в полярной системе координат называется область, ограниченная линиями $\rho_1 = \Phi_1(\theta)$ $\rho_2 = \Phi_2(\theta)$, лучами $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$ $\alpha < \beta$, где $\Phi_1(\theta) \le \Phi_2(\theta)$

Любой луч, проходящий через внутренние точки области, пересекает ее границы не более, и в двух точках.

Пусть в области D задана функция $z = F(\theta, \rho)$. Разобьем область D любым образом на

n частей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$

Составим интегральную сумму $V_n = \sum_{i=1}^{n} F(P_i)\Delta S_i$, где P_i – точка площади.

Перейдя к пределу, получим $V = \iint_D F(\theta, \rho)dS$. Так как предел не должен зависеть от способа разбиения области на части, то разобьем ее лучами $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = \beta$ и концентрическими окружностями $\rho = \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ Составим интегральную сумму

$V_n = \sum_k [\sum_i F(\mathrm{P}_{ik})]\Delta S_{ik}$

$\Delta S_{ik} =$ разности площадей двух секторов $= \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \Delta\theta_k -$
$\frac{1}{2}(\rho_i)^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2}(2\rho_i \Delta\rho_i + (\Delta\rho_i)^2)\Delta\theta_k = \left(\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2}\right)\Delta\rho_i \Delta\theta_k.$

Или $\Delta S_{ik} = \rho_i^* \Delta\rho_i \Delta\theta_k$, где $\rho_i < \rho_i^* < \rho_i + \Delta\rho_i$

Следовательно $V_n = \sum_k \left[\sum_i F\left(\theta_k^*,\ \rho_i^*\right)\rho_i^*\,\Delta\rho_i\right]\Delta\theta_k$

Пусть $\Delta\rho_i$ стремиться к нулю, $\Delta\theta_k = const$. Тогда $\sum_i F(\theta_k{}^*, \rho_i{}^*)\rho_i{}^*\Delta\rho_i = \int_{\Phi_1(\theta_k{}^*)}^{\Phi_2(\theta_k{}^*)} F(\theta_k{}^*, \rho)\rho d\rho$

Пусть $\Delta\theta_k$ стремиться к нулю, тогда $V = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\Phi, \rho)\rho d\rho$

Если $\iint_{(D)} f(\mathrm{x}, y)dxdy$, то $x = \rho cos\theta$, $y = \rho sin\theta$, $dxdy = \rho d\rho d\theta$, $f(x, y) = f(\rho cos\theta, \rho sin\theta) = F(\theta, \rho)$, то $= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} f(\rho cos\theta, \rho sin\theta)\rho d\rho$

7^0. Тройной интеграл и его вычисление.

Пусть в пространстве задана некоторая область V, ограниченная замкнутой поверхностью S. Пусть в области V и на ее границе определена некоторая непрерывная функция f(x,y,z) где x,y,z – прямоугольные координаты точки области. Например, мы можем считать f(x,y,z) объемной плотностью вещества в области V. Посчитаем массу вещества, заключенного в объеме V.

Разобьем область V произвольным образом на n областей с объемами ΔV_i. В каждой из полученных областей произвольным образом выберем точку P_i и посчитаем значение функции в этой точке f (P_i). Составим интегральную сумму вида $\sum_{i=1}^n \mathrm{f}\,(P_i)\,\Delta V_i$

Теперь перейдем к пределу при $n \to \infty$ так, чтобы наибольший из диаметров областей стремился к нулю. Если этот предел не будет зависеть от способа разбиения области на части и от выбора точек P_i, то мы его назовем тройным интегралом и обозначим $\iiint_V f(P)dV$. Таким образом, по определению $\lim_{diam\Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i = \iiint_V f(P)dV$. Или

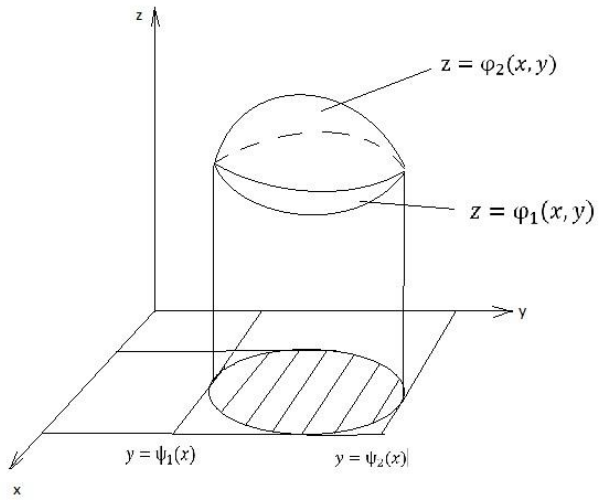
$$\iiint_V f(P)dV = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

Таким образом мы посчитали массу вещества и ввели понятие тройного интеграла.

Для его вычисления дадим определение правильной трехмерной области.

Правильная трехмерная область обладает следующими свойствами:

1) Любая прямая, параллельная оси Oz и проходящая через внутренние точки области, пересекает границу S не более чем в двух точках.



2) Вся область V проецируется на плоскость Oxy в правильную двумерную область D.

3) Любая часть области V , отсеченная плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей, обладает первыми двумя свойствами.

В такой области вводится понятие трехкратного интеграла

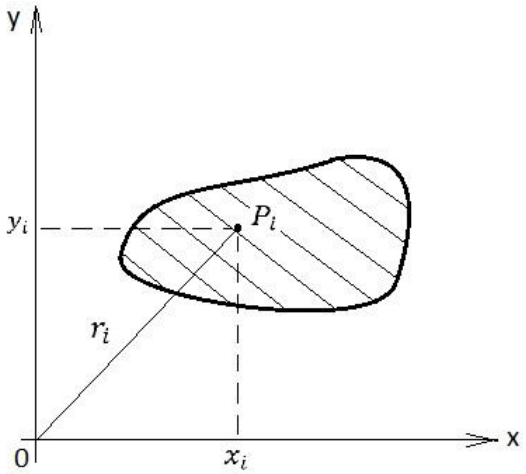
$$\int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Можно показать, что $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz$

8^0. Момент инерции площади плоской фигуры и тела.

а). Момент инерции площади плоской фигуры.

Определение 1. Моментом инерции *I* материальной точки M с массой m относительно некоторой точки O называется $I = m * r^2$, где r-расстояние OM.



Определение 2. Моментом инерции системы материальных точек с

массами $m_1, m_2 \dots m_n$ относительно точки О называется $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$

Определим момент инерции плоской фигуры D, расположенной в плоскости XOY с поверхностной плоскостью $\gamma = \gamma(x, y)$

$$\Delta I_i = (x_i^2 + y_i^2)\gamma(x_i; y_i)\Delta S_i$$

$$\Delta S_i = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\gamma(x_i; y_i)\Delta S_i = \iint_{(D)} (x^2 + y^2)\,\gamma(x; y)dxdy$$

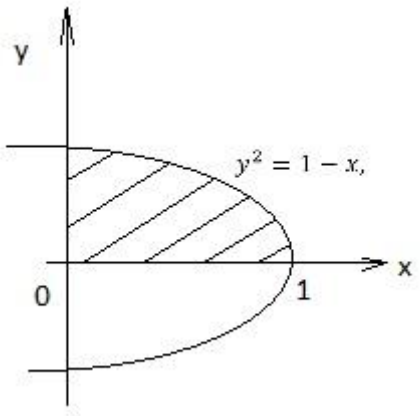
Притом $I_{xx} = \iint_{(D)} (y^2)\, dxdy$ –моемнт инерции относительно оси x,
$I_{yy} = \iint_{(D)} (x^2)\, dxdy$ –момент инерции относительно оси y.

б). Момент инерции тела

Определение. Моменты инерции точки M(x,y,z) массы m относительно координатных осей Ox, Oy, Oz есть соотношения:

$I_{xx} = (y^2 + z^2)\mathrm{m}$, $I_{yy} = (x^2 + z^2)\mathrm{m}$, $I_{zz} = (x^2 + y^2)\mathrm{m}$. Рассуждая аналогично, получим моменты инерции тела относительно осей.

Например : $I_{zz} = \iiint_{(v)} (x^2 + y^2)\,\gamma(x, y, z)dxdydz$, где $\gamma -$ плотность вещества.



Пример: Вычислить момент инерции плотной материальной фигуры D, ограниченной линиями $y^2 = 1 - x, x = 0, y = 0$, относительно оси Oy, если поверхностная плотность в каждой точке равна y.

$$I_{yy} = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2 dy = \frac{1}{24}$$

9⁰. Координаты центра тяжести плоской фигуры и тела.

а). Координаты центра тяжести плоской фигуры.

Определение. Координаты центра тяжести систем материальных точек $P_1, P_2, \dots, P_n$ с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ $\quad x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$

Определим координаты центра тяжести плоской фигуры D с переменной поверхностной плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$.

Разобьем область D произвольным образом на n частей с площадями ΔS_i и, далее рассуждая по стандартной схеме, получим

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \gamma(x_i, y_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(x, y) \Delta S_i}$$

$$y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \gamma(x_i, y_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(x, y) \Delta S_i}$$

Перейдя к пределам, получим

$$x_c = \frac{\iint_{(D)}^{\cdot} x\gamma(x, y) \Delta S_i}{\iint_{(D)}^{\cdot} \gamma(x, y) dxdy}$$

$$y_c = \frac{\iint_{(D)}^{\cdot} y\gamma(x, y) \Delta S_i}{\iint_{(D)}^{\cdot} \gamma(x, y) dxdy}$$

Здесь $M_y = \iint_{(D)}^{\cdot} \gamma(x, y) x dxdy$ – статический момент плоской фигурой относительно Оу.

$M_x = \iint_{(D)}^{\cdot} \gamma(x, y) dyxdy -$ статический момент плоской фигурой относительно Ох.

$\iint_{(D)}^{\cdot} \gamma(x, y) dxdy$ -масса фигуры.

б). Координаты центра тяжести тела.

Проведя аналогичные рассуждения в трехмерном пространстве, получим

$$x_c = \frac{\iiint_{(D)}^{\cdot} x\gamma(x, y, z) dxdydz}{\iiint_{(D)}^{\cdot} \gamma(x, y, z) dxdydz}$$

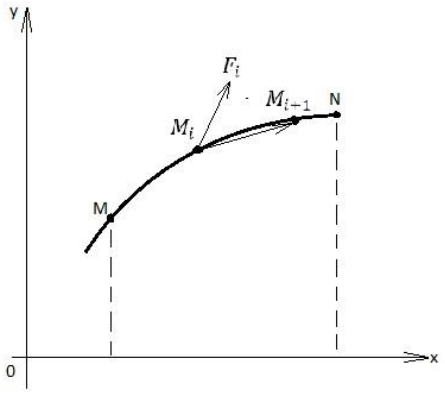
$$y_c = \frac{\iiint_{(D)} y\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint_{(D)} \gamma(x,y,z)dxdydz}$$

$$z_c = \frac{\iiint_{(D)} z\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint_{(D)} \gamma(x,y,z)dxdydz}$$

Лекция 9. Криволинейный интеграл по координатам и его вычисление. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

10^0. Криволинейный интеграл по координатам и его механический смысл.

Пусть точка P(x, y) движется вдоль некоторой плоской линии L от точки M к точке N. К точке P приложена сила **F** , которая меняется по величине и направлению, то есть **F** = **F**(P).



Вычислим работу при перемещении точки P из положения M в положение N. Для этого разобьём кривую MN на n произвольных частей точками M = M_0, M_1, M_2,…, M_n = N в направлении от M к N и обозначим через Δs_i вектор $\overrightarrow{M_i M_{i+1}}$. Величину силы **F** в точке M_i обозначим через $\mathbf{F_i}$.

Тогда скалярное произведение векторов $\mathbf{F_i}\Delta s_i$ можно рассматривать как приближенное значение работы силы **F** вдоль дуги $\widetilde{M_i M_{i+1}}$. $A_i \approx \mathbf{F_i}\Delta s_i$. Пусть

$F_i = X_i(x_i; y_i)i + Y_i(x_i; y_i)j$, где $X_i(x_i; y_i)$ и $Y_i(x_i; y_i)$ – проекции вектора **F** на оси Ox и Oy. Обозначив через Δx_i и Δy_i приращения координат x_i и y_i при перемещении от точки M_i к точке M_{i+1}, получимМесто для формулы.

$$\Delta S_i = \Delta x_i i + \Delta y_i j$$

$$\Delta A_i = X_i \Delta x_i + Y_i \Delta y_i$$

$$A \approx \sum F_i \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} [X_i \Delta x_i + Y_i \Delta y_i]$$

$$A = \lim \sum_{i=1}^{n} [X_i \Delta x_i + Y_i \Delta y_i]$$

$$A = \int_L X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

Или

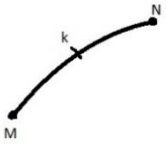
$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

В пространстве :

$\int_L X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz =$

$\lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} X(x_k, y_k, z_k)\Delta x_k + Y(x_k, y_k, z_k)\Delta y_k + z(x_k, y_k, z_k)\Delta z_k$

Свойства:

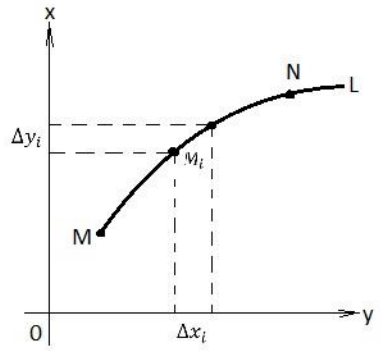
1) При изменения направления интегрирования криволинейного интеграла, интеграл меняет знак.
2) 

$\int_{MN} = \int_{MK} + \int_{KN}$.

Если начало и конец пути интеграла совпадает, то это интеграл по замкнутому контуру (нужно указывать направление обхода контура).

$\oint_L Xdx + Ydy$

11^0. Вычисление криволинейного интеграла.



Пусть кривая L задана уравнением в параметрической форме

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ При $t = \alpha \rightarrow$ точка M.

При $t = \beta \rightarrow$ точка N

Разобьем MN на части точками $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \ldots M_n(x_n, y_n)$. Причем $\begin{cases} x_i = \varphi(t_i) \\ y_i = \psi(t_i) \end{cases}$

Рассмотрим криволинейный интеграл: $\int_L^{\cdot} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$ (1)

Сформируем без доказательства теорему существования: Если функция $\varphi(t)$и $\psi(t)$ непрерывны и имеет непрерывные производные $\varphi'(t)$и $\psi'(t)$, а так же непрерывные функции $X\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ и $Y\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ как функции $t\epsilon[\alpha; \beta]$, то существуют пределы:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\overline{x_\iota}, \overline{y_\iota})\Delta x_i = A$$

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} Y(\overline{x_\iota}, \overline{y_\iota})\Delta y_i = B$$

где $\overline{x_\iota}$ и $\overline{y_\iota}$ – координаты некоторой точки, лежащей на дуге ΔS_i. Эти пределы не зависят от способа деления L на части и от выбора точек $\overline{M_\iota}$, $(\overline{x_\iota}, \overline{y_\iota})$ на дуге ΔS_i. Они называют криволинейными интегралами и обозначаются : $A = \int_L^{\cdot} X(x,y)dx$ и $B = \int_L^{\cdot} Y(x,y)dy$

А теперь получим способ вычисления криволинейного интеграла:

$\int_M^N X(x,y)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\overline{x_\iota}, \overline{y_\iota})\Delta x_i$ (3), где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$

По формуле Лагранжа: $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i$, где $t_{i-1} < \tau_i < t_i$

Так как точку $\overline{\mathrm{M}_\iota}(\overline{x_\iota}, \overline{y_\iota})$ можно выбрать произвольно, то выберем ее так, чтобы $\overline{x_\iota} = \varphi(\tau_i)$, $\overline{y_\iota} = \psi(\tau_i)$. Подставим $\overline{x_\iota}, \overline{y_\iota}$ Δx_i в (3):

$$\int_M^N X(x,y)dx = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)]\, \varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

В этой формуле справа стоит предел интегральной суммы для функции одной переменной $X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$. Следовательно, он равен определенному интегралу:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)dt$$

Аналогично:

$$\int_{(M)}^{(N)} Y(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)dt$$

Сложив полученные равенства, имеем:

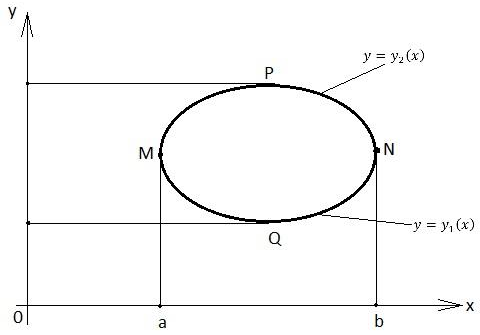
$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'^{(t)} + Y[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\right\}dt$$

Это и есть искомая формула. Если кривая задана явно $y = f(x)$ то это частный случай параметрического задания функции: $\begin{cases} y = f(x) \\ x = x \end{cases}$

$$\int_{MN}^{\cdot} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_{X_M}^{X_N} \{X(x, f(x)) + Y(x, f(x))f'(x)\}$$

12^0. Формула Грина

Установим связь между двойным интегралом по некоторой области D и криволинейным интегралом по границе L этой области. D – правильная область, ограниченная линиями $y = y_1(x), y = y_2(x), a \le x \le b$, в совокупности составляющими замкнутый контур L.



Пусть в D заданы две непрерывные функции $X(x,y)$ и $Y(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные. Рассмотрим

$$\iint\limits_{D}^{\cdot} \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\,dxdy$$

Представим его в виде двукратного:

$$\iint_D^{\cdot} \frac{\partial X}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y}\,dy = \int_a^b dx * X(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int_a^b \big[X\big(x,y_2(x)\big) - X(x,y_1(x))\big]dx \quad (1)$$

Заметим, что $\int_a^b \big[X\big(x,y_2(x)\big)\big]dx$ численно равен криволинейному интегралу $\int_{MPN}^{\cdot} X(x,y)dx$, взятому по кривой $y = y_2(x)$, параметрическое уравнение которой $\begin{cases} y = f(x) \\ x = x \end{cases}$

Таким образом: $\int_a^b \big[X\big(x,y_2(x)\big)\big]dx = \int_{MPN}^{\cdot} X(x,y)dx$
(2)

Аналогично: $\int_a^b \big[X\big(x,y_1(x)\big)\big]dx = \int_{MQN}^{\cdot} X(x,y)dx$
(3)

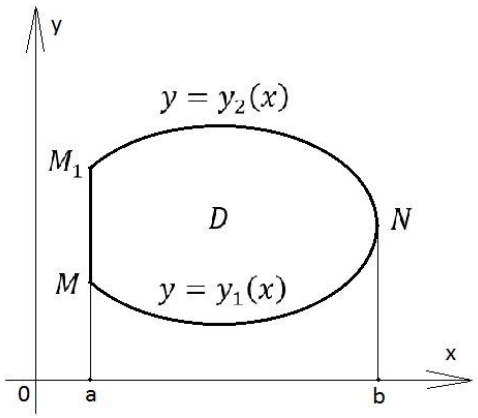
Подставим (2) и (3) в (1): $\iint_D^{\cdot} \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\,dxdy = \int_{MPN}^{\cdot} X(x,y)dx - \int_{MQN}^{\cdot} X(x,y)dx$
(4)

Но $\int_{MQN}^{\cdot} X(x,y)dx = -\int_{NQM}^{\cdot} X(x,y)dx$

Получается: $\iint_D^{\cdot} \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\,dxdy = \int_{MPN}^{\cdot} X(x,y)dx + \int_{MQN}^{\cdot} X(x,y)dx = \oint_L^{\cdot} X(x,y)dx$ (5)

Здесь обход контура ведется по часовой стрелке.

Замечание: Если часть границы соответствует отрезку l_3, паралельный Оу, то $\int_{l_3} X(x,y)dx = 0$ и равенство (5) справедливо и в этом случае.



Аналогично найдем: $\iint_D \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} dxdy = -\oint_L X(x,y)dx$ (6)

Здесь обход контура также по часовой стрелке.

Вычтем из (5) (6) :

$$\iint_D (\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x})\, dxdy = \oint_L Xdx + Ydy$$

Если сделать обход контура против часовой:

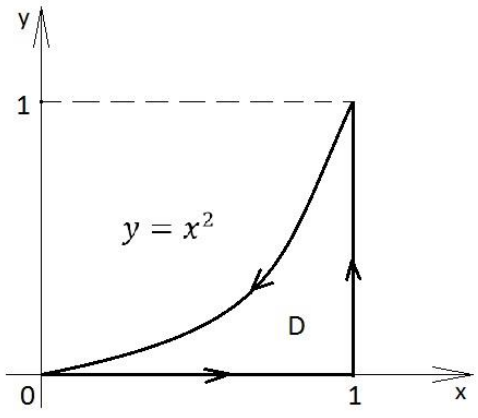
$$\iint_D (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})\, dxdy = \oint_L Xdx + Ydy$$

Это и есть функция Грина . Д. Грин (1793-1841) английский физик и математик.

Мы предположим, что область D –правильная, то можно посчитать, что эта формула справедлива для любой области, которую можно разбить на правильные области.

Пример:

$$\oint_L \left(e^{x^2} - \sqrt{y^2} - 7sinx^2\right)dx + \left(siny^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+x^2}\right)dy$$



L- замкнутый контур, пробегаемый в положительном направлении и ограничивающий область , для которой $0 < x < 1$ и $0 < y < x^2$

$$X(x,y) = e^{x^2} - \sqrt{y^2} - 7sinx^2$$

$$Y(x,y) = siny^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+x^2}$$

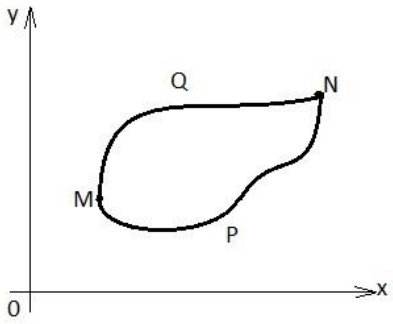
X и Y – непрерывные функции вместе со своими частными производными первого порядка не только в области D, но и на всей плоскости xOy. Следовательно можно пользоваться формулой Грина.

$\frac{\partial Y}{\partial x} = 4x; \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -10y\ ; \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 4x - (-10y) = 4x + 10y = 2(2x + 5y)$

$$I = 2\dot{\iint_D}(2x + 5y)\,dxdy = 2\int_0^1 dx \int_0^{x^2}(2x + 5y)dy = 2$$

Замечание: По функции Грина вычислить интеграл очень просто ,а без нее невозможно, так как невозможно провести интегрирование для e^{x^2} и $sinx^2$.

13^0. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.



Рассмотрим: $\int_M^N Xdx + Ydy$, взятый по некоторой плоской кривой L, соединяющей точки M и N. Пусть $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ имеют непрерывные частные производные в рассматриваемой области D. Выясним, при каких условиях криволинейный интеграл не зависит от формы кривой L, а зависит только от положения точек M и N.

Рассмотрим две произвольные кривые MPN и MQN, лежащие в D и соединяющие точки M и N.

Пусть $\dot{\int_{MPN}} Xdx + Ydy = \dot{\int_{MQN}} Xdx + Ydy$ (1)

$$\dot{\int_{MPN}} Xdx + Ydy - \dot{\int_{MQN}} Xdx + Ydy = 0$$

$$\dot{\int_{MPN}} Xdx + Ydy + \dot{\int_{MQN}} Xdx + Ydy = 0$$

$\oint_L Xdx + Ydy = 0$ (2)

Причем кривую L можно считать произвольной.

Таким образом, показано, что если интеграл не зависит от формы кривой, соединяющей эти точки, а зависит только от положения этих точек, это криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю. Справедливо и обратное.

Каким же условиям должны удовлетворять функции X и Y, чтобы $\int Xdx + Ydy$ по любому замкнутому контуру был равен нулю?

Теорема: Пусть во всех точках некоторой области D функции $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ вместе со своими частями производных $\frac{\partial Y}{\partial x}$ и $\frac{\partial X}{\partial y}$ непрерывны. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл по любой замкнутому контуру, лужащему в D, был равен нулю, то есть, чтобы $\int_L X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$ (2),

необходимо и достаточно , чтобы $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$, (3)

во всех точках области D.

Доказательство. Рассмотрим произвольную замкнутый контур L в D и напишем формулу Грина:

$$\iint_D (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})\, dxdy = \int_L Xdx + Ydy$$

Если выполняется условие (3), то $\int_L Xdx + Ydy = 0$. То есть, доказана достаточность условия (3). Теперь докажем необходимость условия (3):

Пусть $\int_L Xdx + Ydy = 0$, но $\frac{\partial Y}{\partial x} \neq \frac{\partial X}{\partial y}$, хотя бы в одной точке $P(x_0, y_0) \in D$. Пусть например $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0$. Так как $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ - непрерывная функция, то она будет положительна и больше некоторого числа $\delta > 0$ во всех точках некоторой дростаточно малой области D', содержащей точку $P(x_0, y_0)$.

$$\iint_{(D')} (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})\, dxdy > \iint_{(D')} \delta\, dxdy = \delta \mathrm{D}' > 0$$

Но по формуле Грина это равно нулю, получается, что последнее неравенство противоречит условию (2),следовательно, $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ во всех точках области D.

Замечание: Напомним, что если $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$, то выражения $Xdx + Ydy$-полный Место для формулы.дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, то есть $du(x,y) = Xdx + Ydy$, причем $X(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ и $Y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$. Таким образом, криволинейный интеграл от полного дифференциала не зависит от формы кривой, по которой производится интегрирование.

Лекция 10. Поверхностный интеграл по координатам и его вычисление.

14^0. Поверхностный интеграл по координатам.

Пусть в системе координат Oxyz задана некоторая Место для формулы. область V, и пусть в области V задана поверхность σ, ограниченная некоторой произвольнйо линией λ.

Пусть в любой точке P области σ определяется положительное направление нормали единичным вектором $\bar{n}(p)$, направляющие косинусы которого – есть функции координат точек поверхности.

Пусть в любой точке поверхности определен вектор

$$\bar{F} = X(x,y,z)i + Y(x,y,z)j + Z(x,y,z)k$$

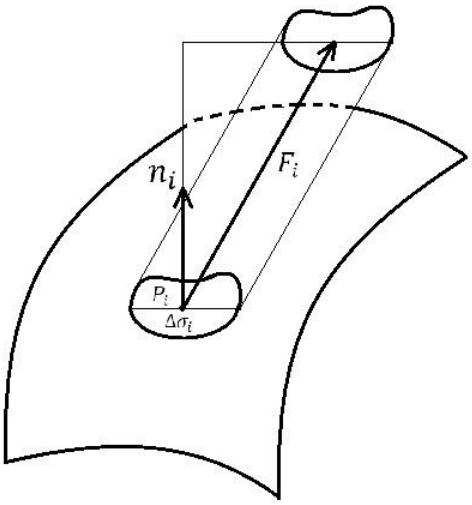
X, Y, Z-непрерывные функции координат точки. Разобьем σ на $\Delta\overline{\sigma_i}$ произвольных координат. Составим

$$\sum_i \bar{F}(P_i) * \bar{n}(P_i)\Delta\overline{\sigma_i}$$

$$\bar{F} * \bar{n} - \text{скалярное произведение.}$$

Перейдя к пределу при $\Delta\overline{\sigma_i} \to 0$, получим поверхностного интеграла: $\iint_\tau \bar{F} * \bar{n}\, d\sigma$

Физический смысл:



Любое слагаемое интегральной суммы $\overline{F_l} * \overline{n_l}\Delta\overline{\sigma_l} = |\overline{F_l}|\Delta\overline{\sigma_l} * \cos(\overline{F_l} * \overline{n_l})$ (*)-объем цилиндра с основанием $\Delta\overline{\sigma_l}$ и высотой $|\overline{F_l}|\cos(\overline{F_l} * \overline{n_l})$

Если $\overline{F_l}$- скорость жидкости, протекающей через поверхность σ, то (*) равно количеству жидкости, протекающей через площадку $\Delta\overline{\sigma_l}$ за единицу времени в направлении вектора $\overline{n_l}$. Следовательно, $\iint_{\tau}^{\cdot} \bar{F} * \bar{n}\, d\tau$- общее количество жидкости, протекающей через σ за единицу времени в положительном направлении, если $\bar{F}$- вектор скорости течения жидкости. Значит поверхностный интеграл- поток векторного поля $\bar{F}$ через поверхность σ.

Следствие 1. Пусть $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$, то $\iint_{\tau}^{\cdot} \bar{F} * \bar{n}\, d\tau = \iint_{\tau_1}^{\cdot} \bar{F} * \bar{n}\, d\tau + \iint_{\tau_2}^{\cdot} \bar{F} * \bar{n}\, d\tau + \cdots + \iint_{\tau_n}^{\cdot} \bar{F} * \bar{n}\, d\tau$

Следствие 2. $\bar{n} = \cos(n,x)\, i + \cos(n,y)\, j + \cos(n,z)\, k$, то $\iint_{\tau}^{\cdot} \bar{F} * \bar{n}\, d\tau = \iint_{\tau}^{\cdot} [X\cos(n,x) + Y\cos(n,y) + Z\cos(n,z)]\, d\sigma$

15^0. Вычисление поверхностного интеграла.

Вычисление поверхностного интеграла сводится к вычислению двойного интеграла по плоской области.

Укажем, например, способ вычисления $\iint_{\sigma}^{\cdot} Z\cos(n,z)\, d\sigma$

Пусть σ такова, что всякая прямая, параллельная оси Oz, пересекает ее в одной точке. Значит уравнение поверхности можно записать в виде $z = f(x,y)$.

Пусть $D -$ проекция σ на плоскость Oxy. Тогда $\iint_{\sigma}^{\cdot} Z\cos(n,z)\, d\sigma =$
$\lim_{max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, z_i)\cos(n_i, z)\,\Delta\sigma_i =$
$\lim_{\cdot} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i))\cos(n_i, z)(\Delta\tau_{xy})_i = \pm$
$\lim_{max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i))|\Delta\tau_{xy}|_i = \pm \iint_{D}^{\cdot} Z\big(x, y, f(x,y)\big)dxdy$

Плюс, если $\cos(n,z) \geq 0$; минус, если $\cos(n,z) \leq 0$

Если σ такова, что не удовлетворяет условиям, то разбиваем ее на сумму областей, удовлетворяющих условиям.

Аналогично, считаем $\iint_{\tau}^{\cdot} X\cos(n,x)\,d\tau$ и $\iint_{\tau}^{\cdot} Y\cos(n,y)\,d\tau$

Числовые и функциональные ряды. Ряды Фурье.

Лекция 11. Числовые ряды. Основные понятия. Необходимый признак сходимости. Свойства.

Теория рядов является мощным орудием вычислительных методов математики. Кроме того она насыщена глубокими логическими построениями. Вот почему теория рядов представляет интерес, как для математиков, так и для всех тех, кто занимается приложениями математики.

1^0. Числовые ряды. Основные понятия.

Пусть дана бесконечная последовательность чисел

$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots$ (1)

где U_n называется общим членом последовательности.

Говорят: Задана последовательность, это значит, что даны члены последовательности или указан закон образования ее членов, по которому можно вычислить любой член U_n для данного n.

Например: Дана последовательность

$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\ \ldots$

Легко сообразить, что общий член этой последовательности будет иметь вид:

$$U_n = \frac{1}{2n\ \ 1}.$$

Наоборот, задан общий член последовательности $U_n = \frac{n+1}{n^2}$. Тогда легко записать последовательность:

$$2,\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{16},\ \frac{6}{25},\ \ldots$$

Определение 1.Выражение $U_1+ U_2+ \ldots+ U_n+ \ldots$, (2)

составленное из членов последовательности (1), называется числовым рядом; числа $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ называются членами ряда; U_n – общий (n –ый) член ряда.

Определение 2. Сумму конечного числа n первых членов ряда

$S_n = U_1+ U_2+ \ldots+ U_n$ (3)

называют n –ой частичной суммой ряда.

Очевидно, что эта сумма изменяется с изменением n. При конечном n это – конечное число. Что же происходит, когда n неограниченно возрастает?

Рассмотрим частичные суммы:

$S_1 = U_1$

$S_2 = U_1+ U_2$

$S_3 = U_1+ U_2 + U_3$

…….

$S_n = U_1+ U_2 + \ldots +U_n$

……

Определение 3. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то его называют суммой ряда (2) и говорят, что ряд (2) сходится.

Определение 4. Если не существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (2) расходится и суммы не имеет.

Определение 5. Величина $r_n = S - S_n$ (4)
называется остатком ряда.

Очевидно, что r_n в свою очередь является бесконечным рядом, который получается из ряда (2) –путем отбрасывания *n* первых членов, то есть

$$r_n = U_{n+1} + U_{n+2} + U_{n+3} + \ldots$$

Величина остатка, как правило, неизвестна. Поэтому важно уметь ее оценивать.

Понятия сходимости и расходимости удобнее всего выяснять на примере геометрической прогрессии:

$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$

Если $|q| < 1$, то есть прогрессия убывающая, то $S = \frac{a}{1 \quad q}$.

Если $|q| \geq 1$, то есть прогрессия неубывающая, то *S* не существует.

2^0. Некоторые свойства рядов.

Свойство 1. Если сходится ряд, получившийся из данного ряда (2) путем отбрасывания нескольких его членов, то сходится и сам данный ряд. Обратно: если ряд (2) сходится, то сходится ряд, полученный из данного отбрасыванием нескольких его членов.

Доказательство. Пусть S_n – сумма n первых членов ряда (2); $C_к$ – сумма к отброшенных членов. (При достаточно большом n все отброшенные члены содержатся в n первых). $\sigma_{n\ k}$ – сумма членов, не входящих в $к$, то есть $S_n = C_к + \sigma_{n\ k}$, где $C_к$ – постоянное число, не зависящее от n. Следовательно, если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n\ k}$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, и наоборот. Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Если ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (5)$$

сходится и его сумма равна S, то ряд

$$Ca_1 + Ca_2 + Ca_3 + \ldots + Ca_n + \ldots \ , \qquad (6)$$

где C = const, тоже сходится и его сумма равна CS.

Доказательство.

Пусть S_n – энная частичная сумма ряда (5),

σ_n – энная частичная сумма ряда (6).

Тогда $\sigma_n = Ca_1 + Ca_2 + Ca_3 + \ldots + Ca_n = C(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = CS_n$. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} CS_n = C\lim\limits_{n\to\infty} S_n = CS$. Что и требовалось доказать.

Свойство 3. Если ряды

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (7)$$

и $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (8)$

сходятся и их суммы равны соответственно $\overline{S}$

и $\overline{\overline{S}}$, то ряд $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$ (9)

сходится и его сумма равна $\overline{S} \pm \overline{\overline{S}}$.

Доказательство. Пусть энная частичная сумма ряда (9) равна σ_n ряда (7) – $\overline{S_n}$, ряда (8) – $\overline{\overline{S_n}}$.

$$\sigma_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm$$

$$\pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \overline{S_n} \pm \overline{\overline{S_n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (\overline{S_n} \pm \overline{\overline{S_n}}) = \lim_{n\to\infty} \overline{S_n} \pm \overline{\overline{S_n}} = \overline{S} \pm \overline{\overline{S}}.$$

Что и требовалось доказать.

3^0. Необходимый признак сходимости ряда.

Теорема. Если ряд сходится, то его *n*-ый член стремится к нулю при *n* $\to \infty$.

Доказательство. Пусть $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$

сходится, то есть $\lim_{n\to\infty} \overline{S_n} = S$, где *S* – сумма ряда. Но тогда и $\lim_{n\to\infty} \overline{S_{n\ 1}} = S$.

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \overline{S_n}$ – $\lim_{n\to\infty} \overline{S_{n\ 1}}$ =

= 0. А значит $\lim_{n\to\infty} (S_n \quad S_{n\ 1}) = 0$. То есть, $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

Что и требовалось доказать.

Следствие. Если *n* – ый член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Пример. Ряд $-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{n}{2n+1} + \ldots$ расходится, так как $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Этот признак является необходимым, но не является достаточным, то есть, если $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, то ряд может и расходится.

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, называемый гармоническим, расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Докажем это:

Запишем ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{!}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}}+\underbrace{\frac{1}{32}+\ldots} \quad (*)$$

Запишем вспомогательный ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{!}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}+\underbrace{\frac{1}{32}+\ldots} \quad (**)$$

Сравнив ряды, замечаем, что $S_n^* > S_n^{**}$.

$$S_n^{**}=1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{16}\cdot 8+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots=$$

$$=1+(k-1)\cdot\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n^{**}=\lim_{k\to\infty}\left[1+(k-1)\frac{1}{2}\right]=\infty$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^*=\infty$. То есть, гармонический ряд расходится.

4^0. Сравнение рядов с положительными членами.

Рассмотрим два ряда с положительными членами

$U_1+ U_2+ \ldots+ U_n+ \ldots$ (1)

$V_1+V_2+ \ldots +V_n+ \ldots$ (2)

Теорема 1. Если $U_n \leq V_n$ (n = 1, 2, …) (3)

и ряд (2) сходится, то и ряд (1) сходится.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$; $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$.

Из (3) следует, что $S_n \leq \sigma_n$ (4)

Так как ряд (2) сходится, то $\lim \sigma_{n\ n\to\infty} = \sigma$. Так

как ряд с положительными членами, то $\sigma_n < \sigma$, а

угловая (4) => $S_n < \sigma$. То есть последовательные части сумм ограниченна сверху и возрастает => существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ притом s< σ.

Пример. 1) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$ сходиться. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ геометрический признак.

2) $\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*2^2}+\frac{1}{3*2^3}+\ldots+\frac{1}{n*2^n}+\ldots$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

Теорема 2. Если $U_n \leq V_n$ и ряд (1) расходится, то и ряд (2) – расходится.

Доказательство. Из условия $U_n \leq V_n$ следует, что $S_n < \sigma_n$, но $\lim S_{n\ n\to\infty} = \infty$ => и $\lim S_{n\ n\to\infty} = \infty$

Пример. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

Лекция 12. Достаточные признаки сходимости числовых знакоположительных рядов.

5^0. Признак Даламбера.

Теорема. Рассмотрим ряд с положительными членами $u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$ (1)

Если $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, где l –конечное число, (2)

то 1) ряд сходится l<1. 2) ряд расходится l>1

Доказательство.

1) Пусть l<1. Рассмотрим число q, такое что l<q<1. Из определения придела следует,

что начиная с некоторого номера n ≥N :

$|\frac{U_n+1}{U_n}-l|<q-l$, где $q-l$ любое наперед заданное число, из этого следует:

$\frac{U_n+1}{U_n}>q$

$U_{n+1}<qU_n$ то есть $U_{N+1}<qU_N$; $U_{N+1}<qU_N\ U_{N+2}<qU_{N+1}<q^2U_n$ и так далее .

Рассмотрим два ряда:

$u_1+u_2+\cdots+u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots$ (1)

$u_N+qu_N+q^2u_N+\cdots$ (1')

Ряд (1') –сходится, то и сходится ряд (1) по принципу сравнения рядов.

2) Пусть l >1 , тогда из равенства (2) следует, что начиная с некоторого номера N для всех n≥N

$\frac{U_n+1}{U_n}>1$, тогда $u_{n+1}>u_n$, получается, что u_n не стремится к 0 и ряд расходится.

Замечание 1. Ряд будет расходиться и в том случае , если $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$, так как и этом случае начиная с некоторого номера n=N $\frac{U_n+1}{U_n}>1$, тогда $u_{n+1}>u_n$, $u_n\neq 0$.

Замечание 2. Если $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, то признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Нужно применить какой-нибудь другой признак.

Замечание 3. Если $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, но отношение $\frac{U_n+1}{U_n}$ для всех номеров n, начиная с некоторого больше 1,то ряд расходится. Это следует из того, что $\frac{U_n+1}{U_n}>1$, то $u_{n+1}>u_n$, $u_n\neq 0$.

Пример.

1) $1+\frac{1}{1*2}+\frac{1}{1*2*3}+\cdots+\frac{1}{1*2*3*\ldots n}+\cdots$

$u_n=\frac{1}{n}$; $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$ то следует , что $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$ ряд сходится.

2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n*n^2}$ $(\frac{1}{3}<1)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$ $(2>1)$

6^0. Радикальный признак Коши.

Теорема.

Рассмотрим ряд с положительными членами $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ (1)

Если $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, где l- конечное число, то

1) В случае $l<1$ ряд сходится
2) В случае $l>1$ ряд расходится

Доказательство.

1) Пусть $l<1$, рассмотрим q: $l<q<1$, то начиная с некоторого n=N при $|\sqrt[n]{u_n}-l|<q-l$ следует , что $\sqrt[n]{u_n}<q$; $u_n<q^n$; $u_N<q^N$ и так далее, при n≥N.

Рассмотрим 2 ряд

$u_1+u_2+\cdots+u_N+u_{N+1}+\cdots$ (1) $q^N+q^{N+1}+\cdots$ (1')

Ряд (1') сходящаяся геометрическая прогрессия, значит ряд (1) сходится.

2)Пусть $l > 1$, то начиная с n=N

$\sqrt[n]{u_n} > 1$, получается $u_n > 1$. То есть $u_n \neq 0$ ряд расходится.

Замечание. Если $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, то надо дополнить исследование примером : $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^{n}$ Предел равен$\frac{1}{2} < 1$.

7^0. Интегральный признак Коши.

Теорема. Пусть члены ряда $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ (1)

положительны и не возрастают , то есть

$u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_n \geq \cdots$ (1')

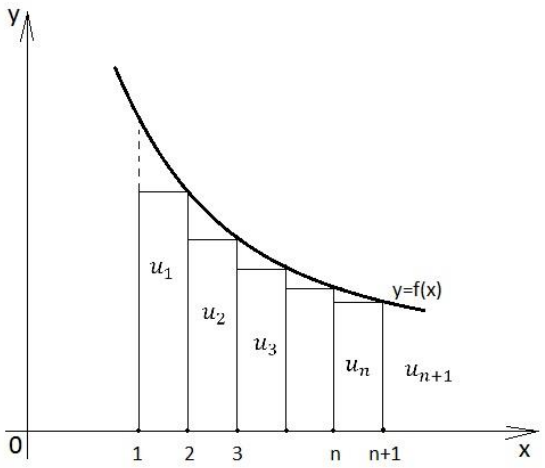
и пусть f(x) такая непрерывная невозрастающая функция , что

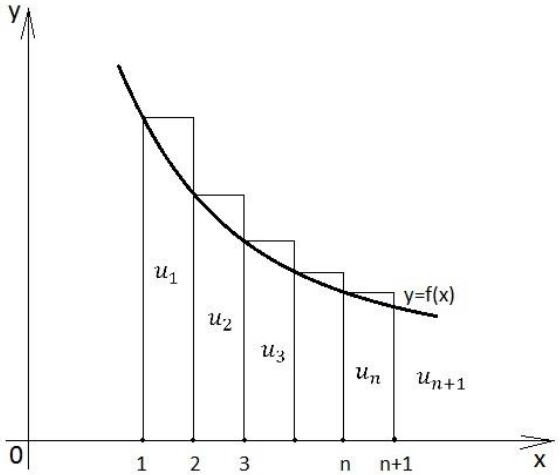
f(1)= u_1; f(2)= u_2 ;… f(n)= u_n … (2)

Тогда :

1) Если $\int_1^{\infty} \mathrm{f(x)}dx$ сходится, то и (1) сходится.
2) Если $\int_1^{\infty} \mathrm{f(x)}dx$ расходится , то и (1) расходится.

Доказательство.





Рассмотрим площадь с основанием (1)

$$S_n - u_n < \int_1^{n+1} \mathrm{f(x)}dx < S_n$$

Перейдя к пределу, при n стремящейся к бесконечности , S_n – части суммы, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} - u_1 < \int_1^{\infty} \mathrm{f(x)}dx < S_n$$

Если $\int_1^{\infty} \mathrm{f(x)}dx$ сходится, то есть имеет конечное число , то и $\lim_{n\to\infty} S_{n+1}$ существует, следовательно, ряд сходится.

Если $\int_1^{\infty} \mathrm{f(x)}dx$ расходится, то и $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует, следовательно, ряд расходится.

Пример. Покажем , что гармонический ряд расходится, используя интегральный признак Коши. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$,

а признак Даламбера здесь ответы не даны.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, где k – любое число, называется обобщенным гармоническим рядом. При

$k > 1$ такой ряд сходится, а при $k \leq 1$ расходится.

Лекция 13. Знакопеременные ряды. Достаточный признак сходимости. Абсолютная и условная сходимости. Знакочередующийся ряд. Признак Лейбница.

8^0. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Определение. Ряд $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots$, где U_1 , U_2 ,U_3 , U_4 , … положительные числа, называется знакопеременным рядом.

Теорема Лейбница. Если в знакопеременном ряде

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots + (-1)^{n+1}U_n + \ldots. \qquad (U_n > 0)$$

(1)

Члены ряда таковы, что $U_1 > U_2 > U_3 > U_4 > \ldots > U_n > \ldots$.

(2)

и $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$,

(3) **Доказательство.** 1). Рассмотрим сумму n = 2m первых членов ряда (1).

$$S_{2m} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \ldots + (U_{2m-1} - U_{2m})$$

Так как верно условие (2), то $U_{2m-1} - U_{2m} > 0$ для любого m. Следовательно, $S_{2m} > 0$ и возрастает с увеличением m.

Теперь запишем S_{2m} в другом виде:

$$S_{2m} = U_1 - (U_2 - U_3) - (U_4 - U_5) - \ldots - (U_{2ь-2} - U_{2m-1}) - U_{2m}$$

Опять каждое выражение в скобках положительно. Следовательно, $S_{2m} < U_1$.

Таким образом, S_{2m} возрастает и ограничена сверху. Значит $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, причем

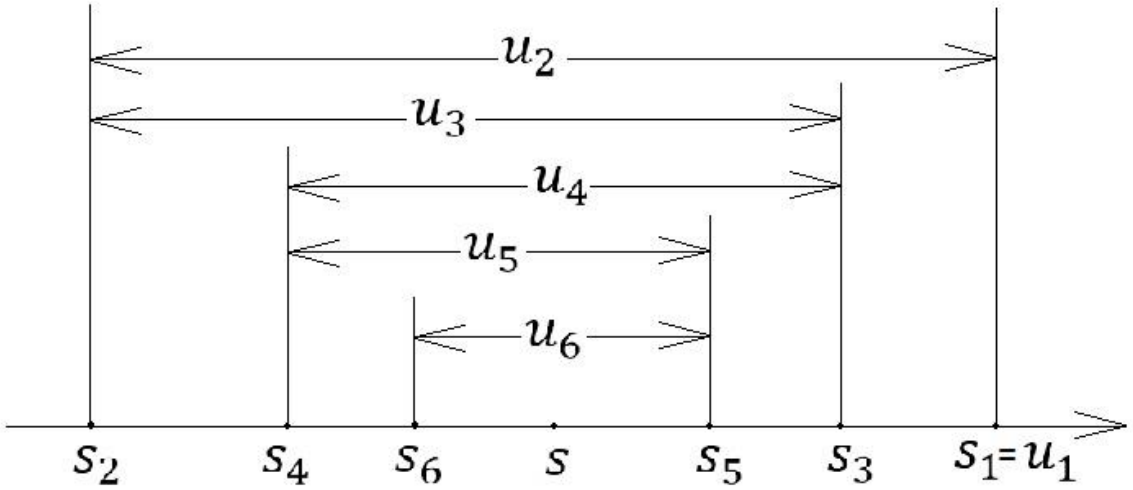
$0 < S < U_1$

2). Теперь рассмотрим нечетное число слагаемых.

$S_{2m+1} = S_{2m} + U_{2m+1}$ Так как по условию (3) $\lim_{m\to\infty} U_{2m+1} = 0$, то $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} + \lim\limits_{m\to\infty} U_{2m+1} = S + 0 = S$, Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ как при четном так и при нечетном n и следовательно ряд (1) сходится.

Замечание 1. Теорема Лейбница справедлива, если условие (2) выполняется начиная с некоторого номера n = N.

Замечание 2.



Теорема Лейбница иллюстрируется геометрически так:

Нечетные S_n расположены справа от S, четные – слева.

Замечание 3. Если знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то нетрудно оценить ошибку, которая получится, если его сумму S заменить S_n. При этом мы отбрасываем все члены ряда, начиная с U_{n+1}. Но эти члены составляют ряд. А его сумма не превосходит U_{n+1}. Значит, ошибка не превосходит первого из отброшенных членов ряда.

Примеры. 1 – 3. Сходятся ли ряды?

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ (сходится)
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (сходится)
3. $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$ (расходится)
4. Указать границу ошибки, которую мы сделаем, если за приближенное значение суммы ряда $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$ примем S_3 или S_4
   Какое из этих чисел больше точного значения суммы S , а какое меньше?

9^0. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Определение. Ряд $U_1+ U_2+ \ldots+ U_n+ \ldots$ называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные.

Знакочередующиеся ряды – частный случай знакопеременных рядов.

Теорема. (Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда) Если знакопеременный ряд $U_1+ U_2+ \ldots+ U_n+ \ldots$ (1)
таков, что ряд $|U_1| + |U_2| + |U_3| + \cdots + |U_n| + \cdots$ (2)
сходится, то и данный ряд сходится.

Доказательство.

Пусть S_n - n-я частичная сумма ряда (1)

σ_n - n-я частичная сумма ряда (2)

S_n' - сумма всех положительных членов среди n первых;

S_n'' - сумма всех отрицательных членов среди n первых.

Тогда $S_n = S_n' - S_n''$; $\sigma_n = S_n' + S_n''$;

Так как ряд (2) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$. S_n' и S_n'' - положительные возрастающие величины, меньшие σ. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n' = S'$ и $\lim\limits_{n\to\infty}S_n'' = S''$ Но тогда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n = S' - S''$ и ряд (1) сходится.

Таким образом, благодаря этой теореме можно судить о сходимости знакопеременных рядов по сходимости знакоположительных рядов.

Пример. Сходится ли ряд $\frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{sunn\alpha}{n^2} + \ldots,$

где α -- любое число.

Для решения рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ и сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Замечание. Теорема, обратная данной не имеет места. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Определение. Знакопеременный ряд $U_1+ U_2+ \ldots+ U_n+ \ldots$ называется абсолютно сходящимся, если ряд $|U_1| + |U_2| + |U_3| + \cdots + |U_n| + \ldots$

сходится.

Определение. Знакопеременный ряд $U_1+ U_2+ \ldots+ U_n+ \ldots$ называется не абсолютно или условно сходящимся, если он сам сходится, а ряд $|U_1| + |U_2| + |U_3| + \cdots + |U_n| + \cdots$ расходится.

Отметим без доказательств следующие свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Свойство 1. Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от того, в каком порядке стоят его члены.

Свойство 2. Если ряд сходится условно, то какое бы мы не задали число А, можно члены ряда переставить так, что его сумма станет равной А. Более того, их можно так переставить, что ряд станет расходящимся.

Примеры. Какие ряды сходятся условно, а какие абсолютно?

1). $1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$ (абс.)

2). $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots$ (абс.)

3). $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ (усл.)

4). $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4}+\ldots$ (абс.)

5). $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots$ (усл.)

6). $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots$ (усл.)

Лекция 14. Функциональные ряды. Интегрирование и дифференцирование рядов. Степенные ряды. Область сходимости.

10^0. Функциональные ряды. Интегрирование и дифференцирование рядов.

Определение. Ряд $U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$ называется функциональным, если его члены являются функциями, зависящими от x.

Фиксируя x в таком ряде, мы получаем числовой ряд.

Определение. Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости ряда.

Очевидно, что в области сходимости ряда его сумма есть функция, зависящая от x.

Например, ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ сходится при $x \in (-1; 1)$. При любом таком x будет получатся убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Если $S_n(x)$ - n-я частичная сумма ряда, то $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$, где $r_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \ldots$

$r_n(x)$ - остаток ряда.

Для всех x из области сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[S(x) - S_n(x)\right] = 0$, то есть остаток сходящегося ряда стремится к нулю при $n \to \infty$.

Определение. Функциональный ряд называется мажорируемым в некоторой области изменения x, если существует такой сходящийся числовой ряд $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \ldots$ с положительными членами, что для любого x из данной области $|U_n(x)| \le \alpha_n$ для любого n.

Теорема 1. Пусть имеем ряд непрерывных дифференцируемых функций $U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$ мажорируемых на отрезке [a, b], и пусть

$S(x)$-сумма этого ряда. Пусть α и x ∈ [a, b]. Тогда

$$\int_{\alpha}^{x} S(t)dt = \int_{\alpha}^{x} U_1(t)dt + \int_{\alpha}^{x} U_2(t)dt + \ldots + \int_{\alpha}^{x} U_n(t)dt + \ldots$$

(Без доказательства)

Теорема 2. Если ряд $U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$, составленный из функций, имеющих непрерывные производные на отрезке [a, b], сходится на этом отрезке к сумме $S(x)$, и ряд $U_1'(x) + U_2'(x) + \ldots + U_n'(x) + \ldots$ мажорируем на том же отрезке, то сумма ряда производных равна производной от суммы первоначального ряда, то есть

$$S'(x) = U_1'(x) + U_2'(x) + \ldots + U_n'(x) + \ldots$$

(Без доказательства)

11^0. Степенные ряды. Область сходимости.

Определение. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots , \quad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ - постоянные числа (коэффициенты) называется степенным рядом.

Для решения вопроса об области сходимости такого ряда докажем сначала следующую теорему:

Теорема Абеля.

1) Если степенной ряд (1) сходится про некотором $x_0 \neq 0$ то он сходится абсолютно при любых x, таких что $|x| < |x_0|$
2) Если он расходится при некотором x_0' , то он расходится при любых x $|x| > |x_0'|$

Доказательство.

1) Так как ряд $a_0 + a_1x_0 + a_1x_0^2 \ldots + a_nx_0^n + \cdots$ (2) сходится то $a_nx_0^n$ стремится к 0 , при n стремящемся к бесконечности, то есть существует M>0 такое, что все члены ряда (1) по абсолютной величине меньше M. Перепишем (1) в виде :
$a_0 + a_1x_0(\frac{x}{x_0}) + a_2x_0^2(\frac{x}{x_0})^2 + \cdots + a_nx_0^n(\frac{x}{x_0})^n + \cdots$ (3)

затем рассмотрим ряд $a_0 +$

$|a_1x_0|\left(\frac{x}{x_0}\right)|+|a_2x_0^2||(\frac{x}{x_0})|^2+\cdots+|a_nx_0^n||(\frac{x}{x_0})|^n+\cdots$ (4)

и ряд $M+M\left|\left(\frac{x}{x_0}\right)\right|+M|(\frac{x}{x_0})|^2+\cdots+M|(\frac{x}{x_0})|^n+\cdots$ (5)

Если $|x|<|x_0|$ то (5) – геометрическая прогрессия с q<1, тогда (5) сходится , и (4) сходится , в итоге , (3) или (1) абсолютно сходятся.

2) Пусть в x_0' ряд (1) расходится, тогда он бы расходился в любой точке $|x|>|x_0'|$, иначе бы сработала 1 часть теоремы . Теорема доказана.

Для чего нужна эта теорема: то есть существует R: $\text{Если } |x|<R$, то ряд сходится, а если $|x|>R$ – расходится ,то есть верна теорема:

Теорема: Область сходимости степенного ряда есть интервал с центром в начале координат.

R называют радиусом сходимости. При x=R и x= -R может быть всякое. Для каждого ряда вопрос о сходимости решается индивидуально. Причем для некоторых рядов R=0, а для других R = ∞.

Способ определения радиуса сходимости.

$$a_0+a_1x+a_2x^2\ldots+a_nx^n+\cdots \quad (1)$$

$$|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x|^2\ldots+|a_n||x|^n+\cdots \quad (2)$$

По признаку Даламбера $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=L*|x|,\ L*|x|<1$ получается, что $|x|<\frac{1}{L}$ $R=\frac{1}{L}$ $R=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ или, используя радикальный признак Коши,

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Примеры:

Найти область сходимости

1)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (R=∞) 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n*3^n}$ [-3; 3)

Теорема о дифференцировании степенных рядов:

Если степенной ряд S(x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots + a_nx^n + \cdots$ (1)
имеет интервал сходимости (-R;R), то ряд

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \dots + na_nx^{n-1} + \cdots \quad (2)$$

Имеет тот же интервал сходимости, причем $\varphi(x) = S'(x)$ если $|x| < R$ (без доказательства).

Более общие понятия степенного ряда.

$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 \dots + a_n(x-a)^n + \cdots$

Что можно сказать об области сходимости такого ряда?

Лекция 15. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов к вычислениям определенных интегралов.

12^0. Ряды Тейлора и Маклорена.

Раньше было показано, что для функции f(x), имеющей все производные до (n+1)- го порядка включительно, в окрестности точки x = a справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a) + R_n(x)$$

(1), где $R_n(x)$ – остаточный член, который вычисляется по формуле $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \quad 0 < \theta < 1$. Если же f(x) имеет производные любого порядки в окрестности точки x=a, то в формуле (1) n может быть как угодно большим.

Пусть в рассматриваемой окрестности $R_n \to 0$ при $n \to \infty : \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Тогда, перейдя к пределу в формуле (1), получим ряд Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a) + \cdots$$

(2)

Формула (2) справедлива лишь тогда, когда $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. В этом случае ряд сходится и его сумма равна $f(x)$.

Докажем , что $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где $P_n(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)$. Так как по условию $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, то $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$, но $P_n(x)$ −n-ая часть суммы ряда (2) . ее предел равен сумме ряда , стоящем в правой части формулы (2) , тогда (2) справедлива. Кроме того из выше изложенного , следует, что ряд Тейлора представляет данную функцию f(x) тогда и только тогда , когда $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Если $\lim_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$, то ряд не представляет данной функциии, хотя и может сходиться(к другой функции) Если в (2) положить a = 0, то получится ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \cdots$$

(3)

13^0 .Примеры разложения функций в ряд Маклорена и Тейлора.

14^0 .Применение рядов к вчислениям определенных интегралов.

Лекция 16. Ряды Фурье. Определение. Постановка задачи. Примеры разложения функций в ряд Фурье в интервале (-π; π).

На прошлой лекции мы говорили об степенных рядах

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (-\infty,\infty)$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots \qquad (-\infty,\infty)$$

Достоинство: простота рядов. Но есть одно но! Вот например sinx – функция периодическая , а степенной ряд это не учитывает. А это важно. (Например, в колебательных системах). Как же не потерять это свойство? Попробуем выразить f(x)

через периодические функции sinx и cosx.

Тригонометрические ряды Фурье

Эти ряды будут выступать, например, как метод решения дифференциальных уравнений в частных производных.

15^0 .Ортогональная система функций на отрезке [a,b]. Примеры ортогональных систем.

Определение. Непрерывные функции f(x) и φ(x) – ортогональны на [a,b] ,если выполняется условие $\int_a^b \mathrm{f(x)}\,\varphi(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 0$ (*)

Для чего нужна непрерывность? Для существования определенного интеграла!

Определение. Система непрерывных функций $\varphi_1(\mathrm{x}), \varphi_2(\mathrm{x})$ ... $\varphi_n(\mathrm{x})$ на [a,b] называется ортогональной системой на этом отрезке, если любые две функции этой системы ортогональны, то есть, если $\int_a^b \mathrm{f}_i(\mathrm{x})\,\varphi_k(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 0$ i=k=1,2,…n (i≠k)

Рассмотрим бесконечную систему функций 1, sinx, cosx ,sin2x, cos2x,…, sinnx, cosnx (1) Такая система называется тригонометрической системной функций.

Теорема. Тригонометрическая системная функция (1) – есть ортогональная система на отрезке [-π ,π].

Доказательство. Достаточно проверить условие (*) для любых произведений.

1) $\int_{-\pi}^{\pi} 1 * sinnxdx = -\frac{1}{n} cosnx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}(cosn\pi - cos(-n\pi)) = 0$
2) $\int_{-\pi}^{\pi} 1 * cosnxdx = \frac{1}{n} sinnx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}(sinn\pi + \mathrm{sin}n\pi) = 0$
3) $\int_{-\pi}^{\pi} sinnx * cosmxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[sin(n+m)x + sin(n-m)x]dx = 0$ (n ≠ m)
4) $\int_{-\pi}^{\pi} cosnx * cosmxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[cos(n+m)x + sin(n+m)x]dx = 0$ (n ≠ m)

5) $\int_{-\pi}^{\pi} sinnx * sinnxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[cos(n-m)x - cos(n+m)x]dx = 0$ (n ≠ m)

Следствие.

Из 4 следует при n=m $\int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nxdx = \ldots = \pi$

Из 5 следует при n=m $\int_{-\pi}^{\pi} sin^2 nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1 - cos2x)dx = \pi$

Примеры.

1). Система функция 1, cosx, cos2x… ортогональная система на [0, π]

2). Система функций sinx, sin2x… ортогональная система на [0, π]

Доказательство аналогично доказательству теоремы.

16^0 . Определение тригонометрического ряда и его физический смысл.

Определение. Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx + b_n sinnx$ (**), где $a_0, a_n, b_n (n = 1,2, \ldots \infty)$- любые действительные числа, называемые коэффициентами ряда (**)

Ряд (**) можно записать по-другому. Для этого введем дополнительный угол (нормирующий коэффициент) φ:

$\begin{cases} a_n = A_n sin\varphi \\ b_n = A_n cos\varphi \end{cases}$ <-> $a_n{}^2 + b_n{}^2 = A_n{}^2$ $\frac{a_n}{b_n} = tg\varphi$

$A_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}$ $\varphi = arctg\frac{a_n}{b_n}$

$$a_n cosnx + b_n sinnx = A_n [sin\varphi cosnx + sinnxcos\varphi] = A_n sin(nx + \varphi)$$

Таким образом ряд (**) приобретает вид:

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(nx + \varphi)$ - имеет смысл гармонических колебаний

17^0 . Тригонометрический ряд Фурье функций

f(x+2π)=f(x) (Вывод коэффициентов ряда Фурье).

Рассмотрим функцию с периодом равным 2π. При каких условиях для такой функции можно найти тригонометрический ряд , сходящийся к данной функции?

а) Определение коэффициентов ряда по формулам Фурье.

Пусть f(x) такова, что она представлена тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции в интервале [-π;π]. То есть, $f(x)$ – сумма ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx + b_n sinnx \qquad (***)$$

Проинтегрируем обе части равенства (***) от [-π;π]:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty}(\int_{-\pi}^{\pi} a_n cosnxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n sinnxdx) =>$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} == \pi a_0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad (\Delta)$$

Теперь умножим (***) на coskx и проинтегрируем $f(x)coskx = \frac{a_0}{2} coskx +$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnxcoskx + b_n sinnxcoskx => \int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx =$

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} coskxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(\int_{-\pi}^{\pi} a_n cosnxcoskxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n sinnxcoskxdx) =>$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx = a_n\pi$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx \quad (\Delta\Delta)$

Теперь умножим (***) на sinkx и снова проинтегрируем. Получим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinkxdx \quad (\Delta\Delta\Delta)$$

Коэффициенты определяются по формулам (Δ), $(\Delta\Delta)$ и $(\Delta\Delta\Delta)$ – коэффициенты Фурье, а ряд (**) с такими коэффициентами – ряд Фурье.

б) Какими же свойствами должна обладать функция, чтобы ряд Фурье для нее сходился и чтобы сумма этого ряда была равна значениям данной функции в соответствующих точках.

Определение. Функция f(x)- называется кусочно-монотонной на интервале [a,b] , если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ на интервалы $(a, x_1), (x_1, x_2) \dots (x_{n-1}, \mathrm{b}) \dots$, так чтобы на каждом из интервалов функция была монотонной (либо невозрастающей ,либо неубывающей).

Из определения следует, что если f(x) - кусочно-монотонная функция, и ограниченная на [a,b], то она может иметь только разрывы первого рода (скачки).

Теорема. Если периодическая функция f(x) с периодом 2 π – кусочно-монотонная и ограниченная на $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье, построенный на этой функции сходится во всех точках. Сумма полученного ряда S(x) равна значению функции f(x) в точках непрерывности функции. В точках разрыва f(x) сумма ряда S(x) равна среднему арифметическому пределу f(x) слева и справа , то есть , если x = c – точка разрыва, то $S(x)_{x=c} = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$

Без доказательства. Эта теорема называется теоремой Дирихле.

Примеры.

1) f(x)=x $[-\pi, \pi]$, $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$
2) f(x)=$\begin{cases} x & [-\pi, 0] \\ -x & (0, \pi] \end{cases}$, $a_0 = \pi$,
$a_n = \frac{2}{\pi n^2}(cosn\pi - 1) = \begin{cases} 0 & n - \text{четная} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & n - \text{нечетная} \end{cases}$, $b_n = 0$
3) f(x)= x^2 $[-\pi, \pi]$

Лекция 17. Ряды Фурье для четных и нечетных функций и для функций с периодом 2l.

18^0 . Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

а) Записать ряд Фурье в обычном виде.

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx + b_n sinnx$ (1)

Где,

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx$ (2)

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinkxdx$

(2)

б) Вспомнить определение четных и нечетных функций.

Рассмотрим $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)dx$ в случае $\varphi(x) -$ четная или $\varphi(x) -$ нечетная.

$\varphi(-x) = \varphi(x) -$ четная $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)dx = \int_{-\pi}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)dx = \int_{0}^{\pi} \varphi(-x)dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} \varphi(x)dx$

$\varphi(-x) = -\varphi(x) -$ нечетная

$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)dx = \int_{-\pi}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)dx = \int_{0}^{\pi} \varphi(-x)dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)dx = -\int_{0}^{\pi} \varphi(x)dx + + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)dx = 0$

В) Разложим в ряд Фурье четную функцию f(x) тогда f(x)*sinnx - нечетная, f(x)*cosnx – четная

(2)=>

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)cosnxdx$ (3)

$b_n = 0$

То есть ряд Фурье содержит только косинусы

Если f(x)- нечетная, то f(x)*cosnx - нечетная , f(x)*sinnx - четная

(2)=>

$a_0 = 0$

$a_n = 0$ (4)

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^4 f(x)sinkxdx$

То есть ряд Фурье содержит только синусы

Формулы (3) и (4) позволяют упростить вычисление коэффициентов ряда Фурье

Пример: f(x)= x^2 $[-\pi, \pi]$

19 ^{0}. Ряд Фурье для функций с периодом 2l.

Рассмотрим f(x) периодическую с периодом равным 2l . Сделаем замену $x = \frac{lt}{\pi}$. Тогда функция $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$- будет периодической с периодом 2π и ее можно разложит на отрезке $[-\pi, \pi]$

$f(\frac{lt}{\pi}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnt + b_n sinnt$, где

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{lt}{\pi})dt$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{lt}{\pi})cosktdt$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{lt}{\pi})sinktdt$

Ввернемся к старой переменной

$t = \frac{lx}{\pi}$ $dt = \frac{\pi}{l}dx$ =>

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(\mathrm{x})\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\mathrm{x})dx$

$a_n = \frac{1}{\mathrm{l}}\int_{-l}^{l} f(\mathrm{x})cos\frac{\pi kx}{l}dx$

$b_n = \frac{1}{\mathrm{l}}\int_{-l}^{\mathrm{l}} f(\mathrm{x})sin\frac{\pi kx}{l}dx$

Все что говорилось о рядах с периодом в 2π, сохраняется для рядов с периодом в 2l

Пример: f(x) = x – 1 [-1; 1}

20^{0} . О разложении в ряд Фурье непериодических функций.

Пусть f(x) располагается на[0;l], дополняя ее определение произвольным образом на [-l;0] мы можем разложить ее в ряд Фурье , в частности можно ее проложить на [-l;0] четно или нечетно .

Пример.

1) Разложить по косинусам (синусам) функцию f(x)=x+1, заданную на [0;π].

Оглавление.

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лекция 1. Основные определения. Приращения. Непрерывность…. ……1

Лекция 2. Частные производные и их геометрический смысл. Полное приращение и полный дифференциал. Применение дифференциала к приближенным вычислениям……5

Лекция 3.Частные производные высших порядков.

Равенство $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ……..7

Лекция 4. Производная сложной функции. Полная производная. Полный дифференциал. Производные от функций, заданных неявно……10

Лекция 5. Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области. Касательная плоскость и нормаль к поверхности……..13

Лекция 6. Скалярное поле. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению. Градиент и его связь с производной по направлению…….17

Кратные и криволинейные интегралы.

Лекция 7. Определение двойного интеграла и его вычисление……21

Лекция 8. Двойной интеграл в полярных координатах. Тройной интеграл и его вычисление. Механические приложения кратных интегралов……28

Лекция 9. Криволинейный интеграл по координатам и его вычисление. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования……34

Лекция 10. Поверхностный интеграл по координатам и его вычисление…..42

Числовые и функциональные ряды. Ряды Фурье.

Лекция 11. Числовые ряды. Основные понятия. Необходимый признак сходимости. Свойства……..44
Лекция 12. Достаточные признаки сходимости числовых знакоположительных рядов……50

Лекция 13. Знакопеременные ряды. Достаточный признак сходимости. Абсолютная и условная сходимости. Знакочередующийся ряд. Признак Лейбница……54

Лекция 14. Функциональные ряды. Интегрирование и дифференцирование рядов. Степенные ряды. Область сходимости……58

Лекция 15. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов к вычислениям определенных интегралов……62

Лекция 16. Ряды Фурье. Определение. Постановка задачи. Примеры разложения функций в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$ ……63

Лекция 17. Ряды Фурье для четных и нечетных функций и для функций с периодом 2l……67