ДОРОХОВ В.М.

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ОПЕРАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

МОСКВА, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем учебном пособии изложены теоретические основы операционного исчисления. Излагаются методы решения задач. Подробно решена 31 задача.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения, изучающих преобразование Лапласа, и для преподавателей вузов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Оригинал и изображение. Преобразование Лапласа.
2. Теорема существования изображения.
3. Свойства преобразования Лапласа.
4. Свертка функций. Теорема умножения изображений.
5. Теоремы дифференцирования и интегрирования оригинала.
6. Теоремы дифференцирования и интегрирования изображений.
7. Нахождение оригиналов по их изображениям.
8. Примеры приложений преобразования Лапласа.
9. Таблица. Оригиналы и их изображения.

§ 1. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА.

Определение 1. Оригиналом называется комплексная функция *f(t)* действительной переменной *t*, удовлетворяющая условиям:

а) *f(t)* –непрерывная функция вместе со своими производными достаточно высокого порядка на всей оси *t*, за возможным исключением конечного числа точек конечного разрыва на каждом интервале конечной длины;

б) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

в) существует число $M > 0$ $S_0 \geq 0$, такие что для любого t

$$|f(t)| < M\ e^{S_0 t}\ , \qquad (1)$$

то есть *f(t)* является функцией ограниченного роста. S_0 - показатель роста функции.

Из этого определения следуют выводы:

1). Из условия (а) вытекает, что оригинал ни при каком значении *t* не обращается в бесконечность. Исходя из этого функции $\frac{1}{t}$, $tg\ t$ не являются оригиналами.

2). Условие (б) практически не является ограничительным, так как при решении практических задач интересующие нас значения *t* начинаются с момента, данного в начальном условии. А за такой момент всегда можно принять $t = 0$.

3). Условие (в) требует, чтобы при $t \to \infty$ функция *f(t)* была ограничена или стремилась к бесконечности не быстрее показательной функции.

Простейшей функцией-оригиналом является **единичная функция**

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & при\ \ t \geq 0, \\ 0, & при\ \ t < 0. \end{cases}$$

Умножение любой функции $\varphi(t)$ на $\eta(t)$ **"гасит"** эту функцию при $t < 0$. Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (а), (в) и не удовлетворяет условию (б) определения 1, то произведение

$$f(t) = \eta(t) \cdot \varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & при\ \ t \geq 0, \\ 0, & при\ t < 0. \end{cases}$$

будет оригиналом.

Для простоты будем опускать множитель $\eta(t)$**,** условившись, что все функции, которые будут рассматриваться, обращаются в ноль при $t < 0$.

Определение 2. Изображением функции *f(t)* (по Лапласу) называется функция комплексной переменной $p = s + iv$, определенная соотношением

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt. \qquad (2)$$

Интеграл $\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ называется интегралом Лапласа.

Определение 3. Операция перехода от оригинала *f(t)* к изображению $F(p)$ называется преобразованием Лапласа и обозначается $L\, f(t) = = F(p)$ или $f(t) \div F(p)$

Теория преобразования Лапласа называется операционным исчислением.

Схема применения операционного исчисления состоит в следующем:

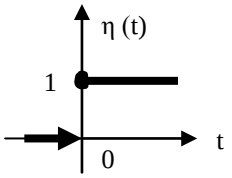
1. Переходим от данных функций к изображениям.
2. Совершая простые операции над изображениями, находим изображение искомой функции.
3. По найденному изображению искомой функции находим оригинал.

Эта схема реализуется с помощью таблиц оригиналов и их изображений, которые составлены на основе их определения интегралом Лапласа или с помощью теорем операционного исчисления.

Приведем примеры непосредственного получения изображений.

Пример 1. Найти изображение единичной функции

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & npu \quad t\ge 0,\\ 0, & npu \quad t<0.\end{cases}$$, удовлетворяющей определению оригинала.



$$L\,\eta(t)=\int_0^{\infty} e^{-pt}\cdot 1dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{pe^{pb}}\right]==\frac{1}{p}\lim_{b\to\infty}\left[1-\frac{1}{e^{pb}}\right]=\frac{1}{p}.$$

При Re p > 0 $\frac{1}{e^{pb}}\to 0$ при $b\to\infty.$

Итак: $\boxed{\eta(t)\div\frac{1}{p}}$ при Re p = Re(s + i v) = s > 0.

Пример 2. Найти изображение функции $f(t) = e^{qt}$, где q – комплексное число.

$$L\, e^{qt} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot e^{qt}dt=\int_0^{\infty} e^{-(p-q)t}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-(p-q)t}dt=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{e^{-(p-q)t}}{-(p-q)}\right|_0^b=$$

$$=\frac{1}{p-q}\lim_{b\to\infty}\left[1-\frac{1}{e^{(p-q)b}}\right]=\frac{1}{p-q}.$$ При Re p > Re q $\frac{1}{e^{(p-q)b}}\to 0$ при $b\to\infty$.

Итак: $\boxed{e^{qt}\div\frac{1}{p-q}}$ при Re p > Re q.

Пример 3. Найти изображение функции $f(t) = \cos mt$, где m – действительное число.

$$L\cos mt = L\left(\frac{e^{imt}+e^{-imt}}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(e^{imt}+e^{-imt}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty} e^{-p1}\cdot e^{imt}dt+\int_0^{\infty} e^{-pt}\cdot e^{-imt}dt\right]=\frac{1}{2}\left[L(e^{imt})+L(e^{-imt})\right]==\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-im}+\frac{1}{p+im}\right]=\frac{p}{p^2+q^2}.$$

Итак $\boxed{\cos mt \ \div \frac{p}{p^2+q^2}}$, если $m \in R.$

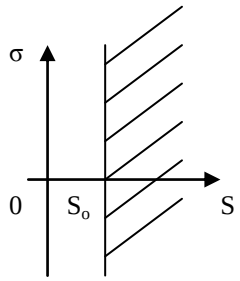
Вывод: Нахождение изображения сводится к вычислению интеграла Лапласа, являющегося несобственным интегралом. Поэтому существование изображения связано со сходимостью несобственного интеграла.

Исходя из этого возникает вопрос: если f(t) оригинал, то в какой части комплексной плоскости функция F(p) определена, то есть, в какой области интеграл Лапласа сходится?

§ 2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ.

Теорема. Для всякого оригинала *f(t)* изображение определено в полуплоскости Re $p > S_0$, где S_0 - показатель роста *f(t)*, и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Доказательство. $p = s + i\sigma$.



1 часть. $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt.$ Оценим модуль интеграла:

$\left|\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt\right| \le \int_0^{+\infty} \left|e^{-pt}\right| \cdot |f(t)|dt.$ Так как $|f(t)| < Me^{S_0 t}$ и $\left|e^{-pt}\right| = \left|e^{-(s+i\sigma)t}\right| =$

$= \left|e^{-st}\right| \cdot \left|e^{-i\sigma t}\right| = e^{-st}\left|\cos\sigma t - i\sin\sigma t\right| = e^{-st}\sqrt{\cos^2\sigma t + \sin^2\sigma t} = e^{-st},$ то

$$\int_0^{+\infty} \left|e^{-pt}\right| \cdot |f(t)|dt < \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot M \cdot e^{S_0 t}dt = M\int_0^{+\infty} e^{-(s-S_0)t}dt = M \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-(s-S_0)t}}{-(s-S_0)}\Bigg|_0^b =$$

$$= \frac{M}{s-S_0}\lim_{b\to\infty}\left[1 - \frac{1}{e^{(s-S_0)b}}\right] = \frac{M}{s-S_0} \text{ при Re } p = s > S_0.$$

Итак: $\left|\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt\right| < \frac{M}{s-S_0}$ при Re $p = s > S_0$.

Полученное неравенство означает, что интеграл Лапласа абсолютно сходится в полуплоскости Re $p = s > S_0$, а поэтому в этой полуплоскости существует изображение F(*p*).

2 часть: Докажем теперь, что F(*p*) является аналитической функцией в полуплоскости Re $p > S_0$.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(s+i\sigma)t} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) \cdot e^{-i\sigma t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)(\cos\sigma t - i\sin\sigma t)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\cos\sigma t dt - i\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\sin\sigma t dt.$$

Отсюда: $F(p) = U(s,\sigma) + i\,V(s,\sigma)$, где $U(s,\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\cos\sigma t dt$,

$V(s, \sigma) = -\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\sin\sigma t dt$.

Необходимым и достаточным условием того, что $F(p) = U(s,\sigma) + i\,V(s, \sigma)$ является аналитической в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > S_0$, является выполнение условий Коши-Римана: $\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$; $\frac{\partial U}{\partial \sigma} = -\frac{\partial V}{\partial s}$.

Проверим эти условия: $\frac{\partial U}{\partial s} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st} f(t)\cos\sigma t]dt = -\int_0^{+\infty} te^{-st} f(t)\cos\sigma t dt$

$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \sigma}[e^{-st} f(t)\sin\sigma t]dt = -\int_0^{+\infty} te^{-st} f(t)\cos\sigma t dt$.

Сравнивая, заключаем, что $\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$.

Аналогично: $\frac{\partial U}{\partial \sigma} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \sigma}[e^{-st} f(t)\cos\sigma t]dt = -\int_0^{+\infty} te^{-st} f(t)\sin\sigma t dt$.

$\frac{\partial V}{\partial s} = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st} f(t)\sin\sigma t]dt = \int_0^{+\infty} te^{-st} f(t)\sin\sigma t dt$.

Сравнивая, заключаем, что $\frac{\partial U}{\partial \sigma} = -\frac{\partial V}{\partial s}$.

Итак, для функции $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > S_0$ выполняются условия Коши-Римана. Значит в этой полуплоскости $F(p)$ является аналитической функцией.

Следствие. Если $F(p)$ является изображением, то $F(p) \to 0$ при $\mathrm{Re}\, p = S_0 \to \infty$.

Доказательство. Из доказанной выше теоремы $|F(p)| < \frac{M}{s - S_0}$ при $\mathrm{Re}\, p = s > S_0$. Пусть $s \to +\infty$, тогда $\frac{M}{s - S_0} \to 0$, значит $\lim_{s \to +\infty} F(p) = 0$.

Замечание. Это следствие является <u>необходимым</u> условием существования $F(p)$, но не является достаточным.

Пример. Функция $e^{-p} \to 0$ при $s \to +\infty$. Но не существует функции $f(t)$ для которой e^{-p} является изображением.

§ 3. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА.

<u>1^0. Свойство однородн</u>

Теорема 1. Если $f(t) \div F(p)$, $\lambda f(t) \div \lambda F(p)$

где λ - любое комплексное число.

Доказательство. $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$. $L[\lambda f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \lambda f(t)dt =$

$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \lambda\ \mathrm{F}(p).$

Итак, при умножении оригинала на λ = const, его изображение также умножается на λ.

2^0. Свойство линейности.

Теорема 2. Если $f(t) \div \mathrm{F}(p)$ и $\varphi(t) \div \Phi(p)$, то

$f(t) + \varphi(t) \div F(p) + \Phi(p).$

Доказательство. $\mathrm{L}\,[f(t) + \varphi(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}[f(t)+\varphi(t)]dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt +$

$+ \int_0^{+\infty} e^{-pt}\varphi(t)dt = F(p)+\Phi(p).$

Итак, сумме оригиналов соответствует сумма изображений.

Замечание. Применяя свойства однородности и линейности преобразования Лапласа, можно находить изображения оригиналов.

Пример 4. Найти изображение функции *sin mt*, где $m \in \mathrm{R}$.

Решение. Так как $\sin mt = \frac{e^{imt} - e^{-imt}}{2i}$, то $\mathrm{L}\,[\sin mt] = \mathrm{L}\left[\frac{e^{imt} - e^{-imt}}{2i}\right] =$

$= \frac{1}{2i}\left[Le^{imt} - Le^{-imt}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-im} - \frac{1}{p+im}\right] = \frac{1}{2i}\frac{2im}{p^2+m^2} = \frac{m}{p^2+m^2}.$

Итак, $\boxed{\sin mt \div \frac{m}{p^2+m^2}}$, где $m \in \mathrm{R}$.

Пример 5. Найти изображение функции $sh\ \omega t$.

Решение. $sh\ \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$, следовательно $\mathrm{L}\,[\mathrm{sh}\ \omega t] = \frac{1}{2}[\mathrm{L}\ e^{\omega t} -$

$-\ \mathrm{L}\ e^{-\omega t}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right] = \frac{2\omega}{2\left(p^2-\omega^2\right)} = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$

Итак: $\boxed{sh\omega t \div \frac{\omega}{p^2-\omega^2}}$.

Аналогично можно показать, что $\mathrm{L}\,[ch\ \omega t] = \mathrm{L}\left[\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right] = \frac{p}{p^2-\omega^2},$

то есть, $\boxed{ch\omega t \div \frac{p}{p^2-\omega^2}}$.

Пример 6. Найти изображение функции $f(t) = \frac{2}{3}\sin 5t - \sin^2 4t.$

Решение. Сначала преобразуем заданный оригинал, используя формулы тригонометрии: $f(t) = \frac{2}{3}\sin 5t - \frac{1-\cos 8t}{2} = \frac{2}{3}\sin 5t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 8t.$

Тогда $\mathrm{L}\ f(t) = \mathrm{L}\left[\frac{2}{3}\sin 5t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 8t\right] = \frac{2}{3}\mathrm{L}\ (\sin 5t) - \frac{1}{2}\mathrm{L}(1) + \frac{1}{2}\mathrm{L}(\cos 8t).$

Используя ранее выведенные формулы, получим:

$\mathrm{L}\ f(t) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{p^2+25} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+64}.$

Итак: $\frac{2}{3}\sin 5t - \sin^2 4t \div \frac{10}{3\left(p^2+25\right)} - \frac{1}{2p} + \frac{p}{2\left(p^2+64\right)}.$

3^0 свойство. Теорема подобия.

Теорема 3. Если $f(t) \div F(p)$, то для любого постоянного $\alpha > 0$ $f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Доказательство. $Lf(\alpha t) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\alpha t)dt$. Сделаем в интеграле замену переменной: $\alpha t = u; t = \frac{u}{\alpha}; dt = \frac{du}{\alpha}$. Границы интеграла не изменятся.

Получим: $Lf(\alpha t) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\alpha t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{\alpha}u} f(u)\frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{\alpha}u} f(u)du =$

$= \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Итак: $\boxed{f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)}$, где $\alpha > 0$.

4^0 свойство. Теорема запаздывания. (Правило сдвига оригинала).

Теорема 4. Если $f(t) \div F(p)$, то $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$ для любого комплексного τ.

Доказательство. $L f(t-\tau) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-\tau)dt.$ Проведем замену переменной в интеграле: $t - \tau = y$, $t = \tau + y$, $dt = dy$, $t_н = 0$, $y_н = -\tau$, $t_в = y_в = \infty$. Тогда $L f(t-\tau)$

$= \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-p(y+\tau)} f(y)dy = \int_{-\tau}^{0} e^{-p(y+\tau)} f(y)dy +$

$+ \int_0^{+\infty} e^{-p(y+\tau)} f(y)dy = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-py} e^{-p\tau} f(y)dy = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} e^{-py} f(y)dy = e^{-p\tau} F(p).$

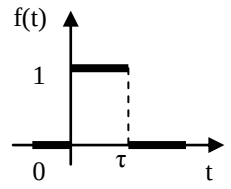
Итак, $\boxed{f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)}$, при $\tau > 0$,

то есть, включение оригинала с запаздыванием на τ равносильно умножению изображения на $e^{-p\tau}$.

Замечание 1. $\int_{-\tau}^{0} e^{-p(y+\tau)} f(y)dy$ обращается в ноль, так как при отрицательных значениях аргумента оригинал равен нулю.

Замечание 2. Правило сдвига оригинала удобно применять при нахождении изображений функций, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями. Примерами таких функций являются ступенчатые функции. Эти функции являются кусочно-постоянными и их можно строить, используя единичную функцию.

Пример 7. Найти изображение функции, заданной графически:



Решение. С помощью единичной функции $\eta(t) = \begin{cases} 1, & при \quad t \geq 0, \\ 0, & при \quad t < 0. \end{cases}$ данную функцию можно задать аналитически следующим образом:

$f(t) = \eta(t) - \eta(t-\tau).$

Действительно:

1). На $(-\infty, 0)$ $\eta(t) = 0$; $\eta(t-\tau) = 0 \Rightarrow f(t) = 0$.

2). На $(0, \tau)$ $\eta(t)=1$; $\eta(t-\tau)=0$, так как $t<\tau$ и поэтому $t-\tau<0$.

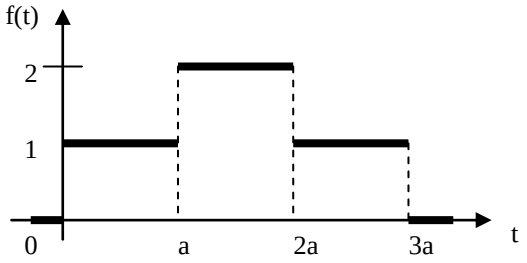
Отсюда $f(t)=1-0=1$.

3). На $(\tau, +\infty)$ $\eta(t)=1$; $\eta(t-\tau)=1 \Rightarrow f(t)=1-1=0$.

$$L\,f(t)=L[\eta(t)-\eta(t-\tau)] = L\,\eta(t)-L\,\eta(t-\tau) = \frac{1}{p}-e^{-p\tau}\cdot\frac{1}{p}=\frac{1-e^{-p\tau}}{p}.$$

Итак : $\boxed{f(t)\div\frac{1-e^{-p\tau}}{p}}$.

Пример 8. Найти изображение функции $f(t)=\begin{cases}1, \text{ при } 0<t<a;\\ 2, \text{ при } a<t<2a;\\ 1, \text{ при } 2a<t<3a;\\ 0, \text{ при } t>3a.\end{cases}$



Решение. Построим график заданной функции.

Используя единичную функцию, зададим $f(t)$ в виде одного аналитического выражения.

$$f(t)=[\eta(t)-\eta(t-a)]+2[\eta(t-a)-\eta(t-2a)]+[\eta(t-2a)-\eta(t-3a)].$$

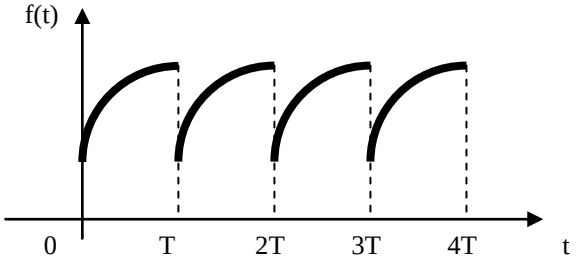
Раскрывая скобки, получим: $f(t)=\eta(t)+\eta(t-a)-\eta(t-2a)-\eta(t-3a).$

Отсюда: $L\,f(t)=L\,\eta(t)+L\,\eta(t-a)-L\,\eta(t-2a)-L\,\eta(t-3a)=\frac{1}{p}+\frac{e^{-pa}}{p}-$

$$-\frac{e^{-2pa}}{p}-\frac{e^{-3pa}}{p}=\frac{1}{p}(1+e^{-ap}-e^{-2ap}-e^{-3ap})=\frac{1}{p}(1+e^{-ap})(1-e^{-2ap}).$$

Итак: $f(t)\div\frac{1}{p}(1+e^{-ap})(1-e^{-2ap})$.

Замечание 3. Правило сдвига оригинала применяется также при определении изображений периодических оригиналов. Пусть $f(t)=f(t+T)$



и $f(t)\div F(p)$. Тогда $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt=$

$$=\int_0^{T}e^{-pt}f(t)dt+$$

$$+\int_T^{2T}e^{-pt}f(t)dt+$$

$$+\int_{2T}^{3T}e^{-pt}f(t)dt+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T}e^{-pt}f(t)dt.$$ Проведем замену переменных в интеграле: U = t – nT; dU = dt; $U_н = 0$; $U_в = T$. Тогда *F(p)* =

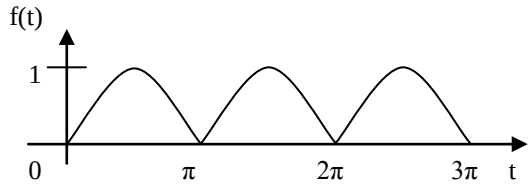
$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-p(U+nT)} f(U+nT)dU = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} \underbrace{\int_0^T e^{-pU} f(u)du}_{\text{постоянная величина}} = \int_0^T e^{-pU} f(U)dU \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} =$ (здесь $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT}$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, так как $\left|e^{-pnT}\right| = e^{-ST} < 1$) $= = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pU} f(U)dU$

Итак, если $f(t) = f(t+T)$, то .

$$f(t) \div \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pU} f(U)dU$$

Пример 9. Найти из $= |\sin 2t|$.

Решение. Данная функция периодическая с периодом T = π.



Найдем изображение этой функции $|\sin 2t| \div \frac{1}{1-e^{-p\pi}} \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin 2t dt =$

$= \frac{1}{1-e^{-p\pi}} \cdot \frac{2}{p^2+4}\left(1+e^{-p\pi}\right)$

Итак: $|\sin 2t| \div \frac{1}{1-e^{-p\pi}} \cdot \frac{2}{p^2+4}\left(1+e^{-p\pi}\right)$

5 свойство. Теорема смещения (правило затухания).

Теорема 5. Если $f(t) \div F(p)$, то $e^{\lambda t} f(t) \div F(p-\lambda)$ при Re $p > S_0 +$ Reλ, где λ - любое комплексное число.

Доказательство. $L(e^{\lambda t} f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot e^{\lambda t} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} f(t)dt =$

$= F(p - \lambda)$ Так как интеграл Лапласа сходится на полуплоскости Re $p > S_0$, то в данном случае Re$(p - \lambda) > S_0$,, следовательно , Re p – Re $\lambda > S_0$ или Re $p > S_0 +$Re λ.

Замечание. Теорема смещения дает возможность определить изображение произведения показательной функции на оригинал, изображение которого известно.

Пример 10. Найти изображение функций $e^{\lambda t} \sin mt$; $e^{\lambda t} \cos mt$.

Решение. Известно: $\sin mt \div \frac{m}{p^2+m^2}$; $\cos mt \div \frac{p}{p^2+m^2}$.

Применив правило затухания, получим:

$$e^{\lambda t} \sin mt \div \frac{m}{(p-\lambda)^2+m^2} \quad . \quad e^{\lambda t} \cos mt \div \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+m^2} \quad .$$

Пример 11. Найти изображение функции $f(t)=cht\cdot\cos t.$

Решение. $cht=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$, тогда $f(t)=cht\cdot\cos t=$

$=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\cos t=\frac{1}{2}\left(e^t\cos t+e^{-t}\cos t\right)$

Применим теперь свойства однородности**,** линейности и теорему смещения. Получим: $f(t)=cht\cdot\cos t\div\frac{1}{2}\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+1}+\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{p-1}{\left(p^2+2\right)-2p}+\frac{p+1}{\left(p^2+2\right)+2p}\right]=\frac{1}{2}\frac{(p-1)\left(p^2+2+2p\right)+(p+1)\left(p^2+2-2p\right)}{\left(p^2+2\right)^2-4p^2}=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2p^3}{p^4+4}=\frac{p^3}{p^4+4}.$ Итак:

$$\boxed{f(t)=cht\cdot\cos t\div\frac{p^3}{p^4+4}.}$$

§4. СВЕРТКА ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ.

Определение. Сверткой функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ называется функция Ψ(t), определяемая равенством

$$\boxed{\psi(t)=\int_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)du.}$$

Обозначение: $(f*\varphi)_t\rightarrow$функция $f(t)$ свернута с функцией $\varphi(t)$.

Пример 12. Найти свертку функций $f(t)=\sin t$ и $\varphi(t)=\cos 3t.$

Решение.

$(f*\varphi)_t=\int_0^t\sin u\cdot\cos 3(t-u)du=\int_0^t\frac{\sin(u+3t-3u)+\sin(u-3t+3u)}{2}du=$

$=\frac{1}{2}\int_0^t[\sin(3t-2u)+\sin(4u-3t)]du=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(3t-2u)}{2}-\frac{\cos(4u-3t)}{4}\right]_0^t=$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos t}{2}-\frac{\cos t}{4}-\frac{\cos 3t}{2}+\frac{\cos 3t}{4}\right]=\frac{1}{8}(\cos t-\cos 3t).$

Итак**:** $\sin t*\cos 3t=\frac{1}{8}(\cos t-\cos 3t).$

6^0 свойство. Теорема умножения изображений.

Теорема 6. Если $f(t)\div F(p)$ и $\varphi(t)\div\Phi(p),$ то $(f*\varphi)_t\div F(p)\cdot\Phi(p),$ то есть умножение изображений равносильно свертыванию оригиналов.

Доказательство. Пусть $\psi(t)=(f*\varphi)_t=\int_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)du.$ Покажем сначала, что $\psi(t)$ также является оригиналом. Для этого надо проверить выполнимость трех условий определения оригинала:

1). $\psi(t)$ – непрерывная функция для всех t , так как является первообразной функцией.

2). $\psi(t) = 0$ при $t < 0$, так как $f(t)$ и $\varphi(t)$ обращаются в ноль при $t < 0$, а значит и интеграл от их произведения также равен нулю.

3). Покажем, что $\psi(t)$ есть функция ограниченного роста. Пусть S_0 – наибольший из показателей роста функций $f(t)$ и $\varphi(t)$, тогда

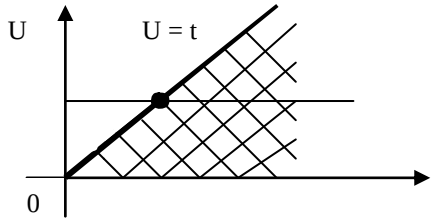
$$\left|\int_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)du\right| < M\left|\int_0^t e^{S_0 u}\cdot e^{S_0(t-u)}du\right| = M\left|\int_0^t e^{S_0 t}du\right| = Me^{S_0 t}\cdot t.$$

Так как $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{\varepsilon t}} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{\varepsilon e^{\varepsilon t}} = 0$ при $\varepsilon > 0$, то функция $f(t) = t$ стремится к бесконечности не быстрее показательной функции, то есть $t < e^{S_0 t}$, где $\varepsilon > 0$. Итак: $\left|\int_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)du\right| < Me^{(S_0+\varepsilon)t}$ или $|\psi(t)| < Me^{(S_0+\varepsilon)t}$, значит $\psi(t)$ есть функция ограниченного роста.

Так как $\psi(t) = (f*\varphi)_t$ является оригиналом, то можно найти ее изображение.

$$L\,\psi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\psi(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int_0^t f(u)\varphi(t-u)du.$$

Это двукратный интеграл, который распространен на сектор (t, u), заштрихованный на чертеже. Так как рассматриваемый интеграл сходится абсолютно, то можно поменять порядок интегрирования в двукратном интеграле. Получим:



$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int_0^t f(u)\varphi(t-u)du =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(u)du\int_u^{\infty} e^{-pt}\varphi(t-u)dt\,.$$

Во внутреннем интеграле произведем замену переменных:

$t - u = \theta$; $dt = d\theta$; $\theta_н = 0$; $\theta_в = +\infty$.

В результате получим:

$$\int_0^{+\infty} f(u)du\int_u^{\infty} e^{-pt}\varphi(t-u)dt = \int_0^{+\infty} f(u)du\int_0^{+\infty} e^{-p(\theta+u)}\varphi(\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du\int_0^{+\infty} e^{-p\theta}\varphi(\theta)d\theta = F(p)\cdot\Phi(p).$$

Ита

$$\boxed{(f*\varphi)_t = \int_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)du \div F(p)\cdot\Phi(p).}$$

Пример 13. Найти изображение свертки функций $f(t) = cht$ и $\varphi(t) = e^{2t}$.

Решение.

1 способ. $(f*\varphi)_t = cht * e^{2t} = \int_0^t chu\cdot e^{2(t-u)}du = \int_0^t \frac{e^u + e^{-u}}{2}e^{2(t-u)}du =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t\left[e^{2t-u} + e^{2t-3u}\right]du = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2t-u}}{-1} + \frac{e^{2t-3u}}{-3}\right]_0^t = \frac{1}{2}\left[-e^t - \frac{1}{3}e^{-t} + e^{2t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right] =$$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} - e^{t}\right].$

Тогда $\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} - e^{t}\right] \div \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1}\right] = \frac{p}{\left(p^2-1\right)(p-2)}.$

2 способ. $cht \div \frac{p}{p^2-1}; \quad e^{2t} \div \frac{1}{p-2}.$

Тогда $cht * e^{2t} \div \frac{p}{p^2-1}\cdot\frac{1}{p-2} = \frac{p}{\left(p^2-1\right)(p-2)}.$

Пример 14. По заданному изображению $F(p) = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$ найти оригинал.

Решение. $F(p) = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2} = 2\cdot\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$

Так как $\cos t \div \frac{p}{p^2+1}; \quad \sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, то используя свойство однородности и теорему умножения, получим: $\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2} \div 2\cos t * \sin t =$

$= 2\int_0^t \cos u \cdot \sin(t-u)du = 2\int_0^t \frac{\sin(t-u+u)+\sin(t-u-u)}{2}du =$

$= \int_0^t [\sin t + \sin(t-2u)]du = u\cdot\sin t\Big|_0^t + \frac{\cos(t-2u)}{2}\Big|_0^t = t\sin t + \frac{\cos t}{2} - \frac{\cos t}{2} = t\sin t.$

Итак: $\boxed{\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2} \div t\cdot\sin t.}$

§ 5. ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОРИГИНАЛА.

Теорема 7. Если *f(t)* непрерывная дифференцируемая функция на (0, ∞) и если $f'(t)$ - оригинал, то из выражения $f(t) \div F(p)$ следует $\boxed{f'(t) \div pF(p) - f(+0)}$, где $f(+0) = \lim_{t\to 0} f(t)$.

Доказательство. $L\,f'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot f'(t)dt = \left|\begin{matrix} u = e^{-pt} & du = -pe^{-ptdt} \\ dv = f'(t)dt & v = f(t) \end{matrix}\right| = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-pt} f'(t)dt =$

$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-pt}f(t)\Big|_0^b + p\int_0^b e^{-pt}f(t)dt\right] = p\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-pt}f(t)dt +$

$+ \lim_{b\to\infty}\left[\frac{f(b)}{e^{pb}} - f(+0)\right] = pF(p) - f(+0).$ Здесь $\lim_{b\to\infty}\frac{f(b)}{e^{pb}} = 0$, так как $f(t)$ - функция ограниченного роста.

Итак: $f'(t) \div pF(p) - f(+0)$

Следствие. Если $f(t)$ - функция, непрерывная в точке *t = 0*, то есть $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to +0} f(t) = f(0)$, то $\boxed{f'(t) \div pF(p).}$

Теорема $7'$. Если $f(t)$ n раз непрерывно дифференцируемая функция на $(0,+\infty)$ и если $f^{(n)}(t)$ - оригинал, то из выражения $f(t) \div F(p)$ следует $f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \cdots - f^{(n-1)}(+0)$.

Доказательство. $f'(t) \div pF(p) - f(+0)$

Так как $f''(t) = (f'(t))'$, то применим теорему 7 к функции $f'(t)$:

$$f''(t) = (f'(t))' \div p[pF(p) - f(+0)] - f'(+0) = p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0).$$

$$f'''(t) = (f''(t))' \div p\left[p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0)\right] - f''(+0) =$$

$$= p^3 F(p) - p^2 f(+0) - pf'(+0) - f''(+0).$$

Повторяя эту операцию, получим формулу:

$$\boxed{f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \cdots - f^{(n-1)}(+0)}$$

Эта формула утверждает, что операция дифференцирования в пространстве оригиналов сводится к операции умножения на степень комплексного числа *p* в пространстве изображений и прибавления к произведению многочлена, членами которого являются предельные значения функции и ее производных.

Следствие. Если $f^{(n+1)}(t)$ непрерывная функция в точке $t = 0$, то $\lim\limits_{t \to -0} f^{(n-1)}(t) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(n-1)}(t) = f(0)$ и $\boxed{f^{(n)}(t) \div p^n F(p)}$.

Пример 15. Ранее было установлено, что $\cos mt \div \dfrac{p}{p^2 + m^2}$.

Выведем теперь эту формулу, используя теорему дифференцирования оригинала.

Так как $\left(\dfrac{1}{m}\sin mt\right)' = \cos mt$ и $\sin mt \div \dfrac{m}{p^2 + m^2}$, то $\left(\dfrac{1}{m}\sin mt\right)' =$

$$= \cos mt \div \frac{1}{m}\left[p \cdot \frac{m}{p^2 + m^2} - \sin(+0)\right] = \frac{1}{m} \cdot p \cdot \frac{m}{p^2 + m^2} = \frac{p}{p^2 + m^2}.$$

Теорема 8. Если $f(t) \div F(p)$, то $\int\limits_0^t f(u)du \div \dfrac{F(p)}{p}$, то есть при интегрировании оригинала изображение надо поделить на *p*.

Доказательство. Если $f(t)$ - оригинал, то $\int\limits_0^t f(u)du = \varphi(t)$ - также оригинал.

Действительно:

1). $\varphi(t)$ - кусочно-непрерывная функция для всех t как первообразная от кусочно-непрерывной функции.

2). При $t < 0$ $f(t) = 0$ и $\int\limits_0^t f(u)du = 0$, значит $\varphi(t) = 0$.

3). Так как $|f(t)| < Me^{S_0 t}$, то $|\varphi(t)| = \left|\int\limits_0^t f(u)du\right| \le \int\limits_0^t |f(u)|du < \int\limits_0^t Me^{S_0 u}du =$

$$= M\frac{e^{S_0 u}}{S_0}\Bigg|_0^t = \frac{M}{S_0}\left(e^{S_0 t} - 1\right)$$ Значит функция $\varphi(t)$ - функция ограниченного роста.

Так как $\varphi(t)$ - оригинал, то существует изображение этой функции $\Phi(p)$, то есть

$\varphi(t) \div \Phi(p)$, тогда $\varphi'(t) \div p\Phi(p) - \varphi(+0) = p\Phi(p)$, так как

$\varphi(+0) = \int_0^0 f(u)du = 0.$

Но с другой стороны $\varphi'(t) = \left[\int_0^t f(u)du\right]' = f(t)$. Значит $\mathrm{L}\,\varphi'(t) = \mathrm{L}f(t) = = F(p)$. Отсюда $F(p) = p\Phi(p).$ Или $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}.$

Или $\boxed{\int_0^t f(u)du \div \frac{F(p)}{p}}.$

Пример 16. Найти изображение функции $f(t) = t^n$, где $n \in N.$

Решение. Рассмотрим единичную функцию $\eta(t) = \begin{cases} 1 & при \quad t > 0 \\ 0 & при \quad t \le 0 \end{cases}$

Изображение этой функции $\eta(t) \div \frac{1}{p}.$ Тогда $\int_0^t 1dt = t.$

По теореме 8: $t \div \frac{F(p)}{p} = \frac{1}{p^2}.$

Повторим операцию интегрирования и применим теорему об интегрировании оригинала:

$\int_0^t udu = \frac{t^2}{2} \div \frac{1}{p^3} \Rightarrow \mathrm{t}^2 \div \frac{2!}{p^3}.$

$\int_0^t \frac{u^2}{2}du = \frac{t^3}{2\cdot 3} \div \frac{1}{p^4} \Rightarrow t^3 \div \frac{3!}{p^4}.$

. . . . . .

$\boxed{t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}}$

§ 6. ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ.

Теорема 9. Если $f(t) \div F(p)$, то $\boxed{-f(t) \div F'(p)}$

Доказательство: $\mathrm{L}(-tf(t) = \int_0^{+\infty} (-te^{-pt}) f(t)dt = \frac{\partial}{\partial p}\left[\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt\right] =$

$= \frac{\partial F(p)}{\partial p} = F'(p).$

Следствие: $\boxed{(-1)^n t^n f(t) \div F^{(n)}(p)}$, (*)

где Re p > $S_1 > S_0$.

Доказательство: Применяя теорему 9 последовательно несколько раз, придем к формуле (*):

$$t^2 f(t) = -t(-tf(t)) \div [F'(p)]' = F''(p)$$
$$-t^3 f(t) = -t\left[t^2 f(t)\right] \div [F''(p)]' = F'''(p)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^n t^n f(t) \div F^{(n)}(p).$$

При доказательстве учитывается тот факт, что F(p) является аналитической функцией на полуплоскости Re p > $S_1 > S_0$ и поэтому существует производная любого порядка этой функции.

Пример 17. Найти функцию-оригинал, изображение которой $F(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$.

Решение: Так как $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$ и $\left[\frac{1}{p^2+1}\right]' = -\frac{2p}{(p^2+1)^2}$, то $\frac{-2p}{(p^2+1)^2} \div -t\sin t$, или $\boxed{t\sin t \div \frac{2p}{(p^2+1)^2}}$.

Пример 18. Найти изображение функции $t^2 e^{2t}$.

Решение: $e^{2t} \div \frac{1}{p-2}$.

$$-te^{2t} \div -\frac{1}{(p-2)^2} \Rightarrow te^{2t} \div \frac{1}{(p-2)^2}.$$

$$t^2 e^{2t} \div \left[-\frac{1}{(p-2)^2}\right]' = \frac{2(p-2)}{(p-2)^4} = \frac{2}{(p-2)^3}.$$

Итак: $\boxed{t^2 e^{2t} \div \frac{2}{(p-2)^3}.}$

Замечание: Этот пример можно также решить, воспользовавшись результатом примера 16 и теоремой смещения.

Решение: $t^2 \div \frac{2!}{p^3}$, тогда $t^2 e^{2t} \div \frac{2}{(p-2)^3}$.

Теорема 10. (Интегрирование изображения). Если $f(t) \div F(p)$ и $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал, то $\boxed{\frac{f(t)}{t} \div \int_p^{+\infty} F(z)dz}$.

Доказательство: Так как $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал, то существует изображение этой функции. Пусть $\frac{f(t)}{t} \div \Phi(p)$. Тогда по теореме дифференцирования изображений получим: $-t\left[\frac{f(t)}{t}\right] \div \Phi'(p)$ или $-f(t) \div \Phi'(p)$ или $f(t) \div -\Phi'(p)$. Но $f(t) \div F(p)$, значит $F(p) = -\Phi'(p)$.

Проинтегрируем это равенство на отрезке $[p,q]$:

$$\int_p^q F(z)dz = -\int_p^q \Phi'(z)dz = -\Phi(z)\Big|_p^q = \Phi(p) - \Phi(q).$$

Пусть Re $q \to +\infty$, тогда на основании следствия из теоремы существования изображения, получим $\lim\limits_{\mathrm{Re}q\to+\infty} \Phi(q)=0.$

Итак: $\int\limits_p^q F(z)dz=\Phi(p).$ Отсюда $\boxed{\frac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^{+\infty} F(z)dz}$.

Пример 19. Найти изображение функции $f(t)=\frac{\sin t}{t}$.

Решение: $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$; тогда $\frac{\sin t}{t} \div \int\limits_p^{+\infty} \frac{dz}{z^2+1} = arctgz\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - arctgp = arcctgp$.

Итак: $\boxed{\frac{\sin t}{t} \div arcctgp}$.

Пример 20. Найти изображение функции $f(t)=\frac{1-e^{3t}}{te^t}$.

Решение: Данную функцию представим в виде $f(t)=\frac{1-e^{3t}}{t}\cdot e^{-t}$. При нахождении изображения этой функции найдем сначала изображение функции ($1 - e^{3t}$), затем применим теорему интегрирования изображения и таким образом найдем изображение функции $\frac{1-e^{3t}}{t}$. Затем применим теорему смещения и найдем изображение функции $f(t)=\frac{1-e^{3t}}{t}\cdot e^{-t}$.

Итак: 1). $1-e^{3t} \div \frac{1}{p}-\frac{1}{p-3}.$

2). $\frac{1-e^{3t}}{t} \div \int\limits_p^{+\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-3}\right)dp = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_p^b\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-3}\right)dp = \lim\limits_{b\to\infty}\ln\frac{p}{p-3}\Big|_p^b =$

$= \lim\limits_{b\to\infty}\left[\ln\frac{b}{b-3}-\ln\frac{p}{p-3}\right] = \ln\lim\limits_{b\to\infty}\frac{b}{b-3}+\ln\frac{p-3}{p} = \ln 1+\ln\frac{p-3}{p} = \ln\frac{p-3}{p}$.

$\frac{1-e^{3t}}{t} \div \ln\frac{p-3}{p}.$

3). $\frac{1-e^{3t}}{t}\cdot e^{-t} \div \ln\frac{(p+1)-3}{p+1} = \ln\frac{p-2}{p+1}.$

Итак: $\boxed{f(t)=\frac{1-e^{3t}}{te^t} \div \ln\frac{p-2}{p+1}}$.

Теорема 11. (Формула Дюамеля). Если при $t\to+0$ $f(t)=f(0)$ и $f(t)\div F(p)$; $\varphi(t)\div\Phi(p)$, то $pF(p)\Phi(p)\div f(0)\varphi(t)+\int\limits_0^t f'(u)\varphi(t-u)du$.

Доказательство: $pF(p)\Phi(p)=f(0)\Phi(p)+[pF(p)-f(0)]\Phi(p).$

Определим теперь оригинал каждого слагаемого этого равенства:

1). $f(0)\Phi(p)\div f(0)\varphi(t).$

2). $pF(p)-f(0)\div f'(t)$ (по теореме дифференцирования оригинала).

3). $[pF(p)-f(0)]\Phi(p)\div f'(t)*\varphi(t)$ (по теореме свертывания).

Итак: $pF(p)-f(0)\Phi(p)\div\int\limits_0^t f'(u)\varphi(t-u)du$.

Отсюда, учитывая свойства линейности, найдем:

$$\boxed{pF(p)\Phi(p) \div f(0)\varphi(t) + \int_0^t f'(u)\varphi(t-u)du}$$

Замечание. Данная формула имеет еще три эквивалентных вида:

$$pF(p)\Phi(p) \div f(0)\varphi(t) + \int_0^t f(u)\varphi'(t-u)du =$$

$$= pF(p)\Phi(p) \div f(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi'(u)f(t-u)du =$$

$$= pF(p)\Phi(p) \div f(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(u)f'(t-u)du .$$

Пример 21. Найти оригинал для данного изображения $\Theta(p) = \frac{p}{(p-2)(p-3)}$.

Решение: $\Theta(p) = \frac{p}{(p-2)(p-3)} = p \cdot \frac{1}{p-2} \cdot \frac{1}{p+3} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p-2}$;

$\Phi(p) = \frac{1}{p+3}$. $\frac{1}{p-2} \div e^{2t} = f(t)$; $\frac{1}{p+3} \div e^{-3t} = \varphi(t)$.

$$p \cdot \frac{1}{p-2} \cdot \frac{1}{p+3} \div e^{2\cdot 0} \cdot e^{-3t} + \int_0^t 2e^{2u} e^{-3(t-u)} du = e^{-3t} + 2\int_0^t e^{-3t} e^{5u} du = e^{-3t} +$$

$$+ 2e^{-3t} \cdot \frac{e^{5u}}{5}\Big|_0^t = e^{-3t} + 2e^{-3t} \cdot \frac{1}{5}\left(e^{5t} - 1\right) = \frac{3}{5}e^{-3t} + \frac{2}{5}e^{2t}.$$

Итак: $\boxed{\frac{p}{(p-2)(p-3)} \div \frac{3}{5}e^{-3t} + \frac{2}{5}e^{2t}}$.

§7. НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛОВ ПО ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯМ.

Изучая свойства преобразования Лапласа, установили правила, по которым определяются изображения для данных оригиналов. Рассмотрим теперь обратную задачу – определение оригинала по заданному изображению.

В общем виде эта задача разрешима теоремой обращения.

Теорема: Если $f(t)$ – оригинал и $F(p)$ служит ее изображением, то в любой точке своей непрерывности

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S-i\infty}^{S+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{S-i\omega}^{S+i\omega} F(p)e^{pt}dp . \qquad (1)$$

Формула (1) называется формулой обращения преобразования Лапласа. Эта формула очень трудоемка для практического применения, так как для вычисления интеграла надо применять методы теории функций комплексной переменной. Поэтому стараются избежать применения формулы (1) и пользуются другими методами.

I метод. Использование таблиц изображений и свойств преобразования Лапласа.

Пример 22. Для изображения $F(p) = 4e^{-3p} \cdot \frac{1}{p^2+4}$ найти оригинал.

Решение: Функцию $F(p)$ перепишем в виде $F(p) = 2 \cdot \frac{2}{p^2+4} \cdot e^{-3p}$.

1). По таблице изображений $2 \cdot \frac{2}{p^2+4} \div 2\sin 2t$.

2). Умножение на e^{-3p} означает сдвиг оригинала на $\tau=3$. Значит

$$f(t)=2\sin 2(t-3).$$

II метод. Разложение изображения.

Пусть $F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ – правильная рациональная дробь. Найти оригинал по этому изображению можно, если предварительно разложить $F(p)$ на простейшие дроби.

Возможны следующие случаи:

1). Все корни знаменателя простые и ни один из них не равен нулю.

2). Один из простых корней знаменателя равен нулю.

3). Корни знаменателя кратные.

Корни знаменателя $F(p)$ называются его полюсами.

Рассмотрим все перечисленные выше случаи.

1 случай. $F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$, где $F_2(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)$, причем $p_i\neq 0.$ Тогда

$$\boxed{F(p)=\frac{F_1(p)}{\prod_{k=1}^{n}(p-p_k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{p-p_k}.} \qquad (2)$$

Для нахождения коэффициентов $C_1, C_2, \ldots C_n$ поступим следующим образом:

Умножим (2) на $(p-p_1)$:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)}(p-p_1)=C_1+(p-p_1)\left(\frac{C_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{C_n}{p-p_n}\right).$$

Пусть $p\to p_1$, тогда $\lim\limits_{p\to p_1}\frac{F_1(p)(p-p_1)}{F_2(p)}=C_1.$

Вычислим полученный предел, используя правило Лопиталя:

$$C_1=\lim_{p\to p_1}\frac{F_1'(p)(p-p_1)+F_1(p)}{F_2'(p)}=\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}.$$

Итак: $\boxed{C_1=\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}}$

Аналогично найдем C_2:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)}(p-p_2)=C_2+(p-p_2)\left(\frac{C_1}{p-p_1}+\frac{C_3}{p-p_3}\ldots+\frac{C_n}{p-p_n}\right).$$

$\lim\limits_{p\to p_2}\frac{F_1(p)(p-p_2)}{F_2(p)}=C_2.$ Или

$$C_1=\lim_{p\to p_2}\frac{F_1'(p)(p-p_2)+F_1(p)}{F_2'(p)}=\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}.$$

$$\boxed{C_2=\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}}$$

И так далее. Получим:

$$\boxed{C_\kappa=\frac{F_1(p_\kappa)}{F_2'(p_\kappa)},\kappa=1,2,3,\ldots n.}$$

Окончательно получим:

$$F(p)=\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{p-p_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}\cdot\frac{1}{p-p_k}.$$

Так как $\frac{1}{p-p_k}\div e^{p_k t}$, то $F(p)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}\cdot\frac{1}{p-p_k}\div\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_k t}$.

Итак, если $F(p)$ имеет простые, отличные от нуля полюса, то

$$\boxed{F(p)\div\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_k t}} \qquad (3)$$

Формула (3) называется второй теоремой разложения Хевисайда.

Замечание. Если $F(p)=\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{p^k}$,то оригинал для нее имеет вид:

$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{(k-1)!}t^{k-1}$. Это – первая теорема разложения Хевисайда.

Пример 23. По изображению $F(p)=\frac{p^2-p+2}{p^3-7p+6}$ найти оригинал.

Решение: $F_1(p)=p^2-p+2$; $F_2(p)=p^3-7p+6$.

Разложим $F_2(p)$ на множители: $F_2(p)=p^3-7p+6=\ p^3-p-6p-6=$

$=\ p(p^2-1)-6(p+1)=(p+1)(p^2-p-6)=(p+1)(p+2)(p-3).$

Значит $p_1=-2;\ \ p_2=-1;\ \ p_3=3$ – полюса функции $F(p).$

$F_1(p)=p^2-p+2$ $\qquad$ $F_2'(p)=3p^2-7$

$F_1(-2)=4+2+2=8$ $\qquad$ $F_2'(-2)=12-7=5$

$F_1(-1)=1+1+2=4$ $\qquad$ $F_2'(-1)=3-7=-4$

$F_1(3)=9-3+2=8$ $\qquad$ $F_2'(3)=27-7=20$

Тогда $F(p)=\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{4}{-4}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{8}{20}\cdot\frac{1}{p-3}.$

Значит $f(t)=\frac{8}{5}e^{-2t}-e^{-t}+\frac{2}{5}e^{3t}.$

2 случай. Пусть среди полюсов $p_1,p_2,\ldots,p_n$ один обращается в ноль.

Для определенности положим $p_n=0.$

Тогда $F_2(p)=p(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_{n-1}).$

Обозначим $\Phi(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_{n-1}).$ Тогда $F_2(p)=p\Phi(p).$

$$F_2'(p)=p\Phi'(p)+\Phi(p). \qquad (*)$$

Корни $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}$ обращают равенство (*) в равенства $F_2'(p_k)=p_k\Phi'(p_k)$, где $k=1,2,3,\ldots,(n-1).$

При $p=0$ $\quad F_2'(0)=\Phi(0).$

Итак: $F(p)=\frac{F_1(p)}{p\Phi(p)}=\frac{F_1(0)}{\Phi(0)}\cdot\frac{1}{p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{F_1(p_k)}{p_k\Phi'(p_k)}\cdot\frac{1}{p-p_k}.$

Исходя из этого получим оригинал:

$$\boxed{f(t)=\frac{F_1(0)}{\Phi(0)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{F_1(p_k)}{p_k\Phi'(p_k)}\cdot e^{p_k t}.} \qquad (4)$$

Формула (4) является частным случаем второй теоремы разложения Хевисайда.

Пример 24. Найти оригинал, если $F(p)=\frac{3p+1}{p^3-5p^2+6p}.$

Решение. $F_1(p)=3p+1;\ \ F_2(p)=p^3-5p^2+6p=p(p^2-5p+6)=$

$=\ p(p-2)(p-3)$, где $\Phi(p)=p^2-5p+6.\ \ p_1=0;\ \ p_2=2;\ \ p_3=3.$

$F_1(p)=3p+1$ $\qquad\qquad$ $\Phi'(p)=2p-5$

$F_1(2)=7$ $\qquad\qquad$ $\Phi'(2)=-1$

$F_1(3)=10$ $\qquad\qquad$ $\Phi'(3)=1$

$F_1(0)=1$ $\qquad\qquad$ $\Phi(0)=6$

Тогда: $F(p)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p}+\frac{7}{2(-1)}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{10}{3\cdot1}\frac{1}{p-3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p}-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{p-3}.$

Значит $\underline{f(t)=\frac{1}{6}-\frac{7}{2}e^{2t}+\frac{10}{3}e^{3t}.}$

<u>3 случай</u>**.** $F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ и среди корней $F_2(p)$ есть кратные.

Пусть $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_l$ – корни соответствующей кратности $r_1,r_2,...r_l$, причем $r_1+r_2+...+r_l=n.$ В этом случае $f(t)$ определяется по формуле:

$$\boxed{f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left[(p-\alpha_k)^{r_k}\cdot\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\cdot e^{pt}\right].} \qquad (5)$$

Пример 25. Найти оригинал для данного изображения $F(p)=\frac{p-2}{p^2(p-3)}.$

Решение: Полюса функции $F(p)$ $p=0$ кратности $r=2$ и $p=3$ кратности $r=1.$

Исходя из этого по формуле (5) получим:

$$f(t)=\frac{1}{1!}\lim_{p\to0}\frac{d}{dp}\left[p^2\cdot\frac{p-2}{p^2(p-3)}e^{pt}\right]+\frac{1}{0!}\lim_{p\to3}\left[(p-3)\cdot\frac{p-2}{p^2(p-3)}e^{pt}\right]=$$

$$=\lim_{p\to0}\left[\frac{(p-2)e^{pt}}{p-3}\right]'+\lim_{p\to3}\left[\frac{p-2}{p^2}e^{pt}\right]= \qquad =\lim_{p\to0}\frac{\left|e^{pt}+t(p-2)e^{pt}\right|(p-3)-(p-2)e^{pt}}{(p-3)^2}+\lim_{p\to3}\left[\frac{p-2}{p^2}e^{pt}\right]=$$

$$\frac{(1-2t)(-3)+2}{(-3)^2}+$$

$$+\frac{1}{9}e^{3t}=\ -\frac{1}{9}+\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}e^{3t}.$$

Ответ: $\qquad f(t)=\ \underline{-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}e^{3t}.}$

<u>Замечание:</u> Если $F_2(p)$ имеет помимо действительных корней и комплексно-сопряженные, то

$$\boxed{\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\div\sum_{k=1}^{r}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_kt}+2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{s}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_kt}}\ , \qquad (6)$$

где r – число действительных корней знаменателя;

s – число пар комплексно-сопряженных корней знаменателя.

Пример 26. $F(p)=\frac{p^2}{(p-3)(p^2+4)}.$ Найти оригинал $f(t).$

Решение: $F(p)=\frac{p^2}{(p-3)(p-2i)(p+2i)}.\ \ F_1(p)=p^2;\ \ F_2(p)=(p-3)(p^2+4);$

$F_2'(p)=(p^2+4)+(p-3)2p=3p^2-6p+4.$

$F_1(p)=p^2$ $\qquad$ $F_2'(p)=3p^2-6p+4$

$F_1(3)=9$ $\qquad$ $F_2'(3)=13$

$F_1(-2i)=-4$ $\qquad$ $F_2'(-2i)=-8+12i$

$F_1(2i)=-4$ $\qquad$ $F_2'(2i)=-8-12i$

Итак: $\frac{p^2}{(p-3)(p^2+4)}=\frac{9}{13}\cdot\frac{1}{p-3}+\frac{-4}{-8+12i}\cdot\frac{1}{p+2i}+\frac{-4}{-8-12i}\cdot\frac{1}{p-2i}.$

Исходя из этого, получим:

$f(t)=\frac{9}{13}e^{3t}+2\mathrm{Re}\left[\frac{-4}{-8+12i}e^{-2it}-\frac{4}{-8-12i}e^{2it}\right]=\frac{9}{13}e^{3t}+$

$+2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2-3i}e^{-2it}+\frac{1}{2+3i}e^{2it}\right]=\frac{9}{13}e^{3t}+2\mathrm{Re}\left[\frac{2+3i}{13}e^{-2it}+\frac{2-3i}{13}e^{2it}\right]=$

= (в квадратных скобках записана сумма двух комплексно-сопряженных чисел) = $\frac{9}{13}e^{3t}+\frac{4}{13}\mathrm{Re}\left[(2+3i)e^{-2it}\right]=\frac{9}{13}e^{3t}+\frac{4}{13}\mathrm{Re}\left[(2+3i)(\cos 2t-i\sin 2t)\right]=$

$=\frac{9}{13}e^{3t}+\frac{4}{13}(2\cos 2t+3\sin 2t).$

Ответ: $\frac{p^2}{(p-3)(p^2+4)}\div\frac{9}{13}e^{3t}+\frac{4}{13}(2\cos 2t+3\sin 2t).$

§ 8. ПРИМЕРЫ ПРИЛОЖЕНИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА.

Общая схема приложения преобразования Лапласа**.**

Пусть требуется найти функцию $f(t)$ действительной переменной из некоторого уравнения, содержащего эту функцию под знаком производной и интеграла. Операционный метод решения этих задач сводится к четырем последовательным шагам:

1). От искомой функции $f(t)$ переходят к изображению $F(p)$.

2). Над функцией $F(p)$ производят операции, соответствующие заданным операциям над $f(t)$, то есть вместо данного уравнения получают операторное уравнение.

3). Полученное операторное уравнение решают относительно $F(p)$.

4). От найденного изображения $F(p)$ переходят к функции $f(t)$, которая и является искомой функцией.

1. Применение преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Дано уравнение $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(t)$ (1)

с начальными условиями $y(0)=y_0;\ y'(0)=y_0';\ \ldots;\ y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}.$

Найти $y=\varphi(t)$ – частное решение уравнения (1).

Решение: Для решения уравнения будем считать, что $a_0 \neq 0$ и функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ вместе со своими производными являются оригиналами.

Применим схему приложения преобразования Лапласа:

1). Обозначим: $f(t) \div R(p)$ и $\varphi(t) \div F(p)$.

2). По правилу дифференцирования и свойству линейности изображения вместо уравнения (1) с учетом начальных условий получим операторное уравнение:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) F(p) = R(p) + y_0 (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) +$$
$$+ y_0' (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + a_0 y_0^{(n-1)}.$$

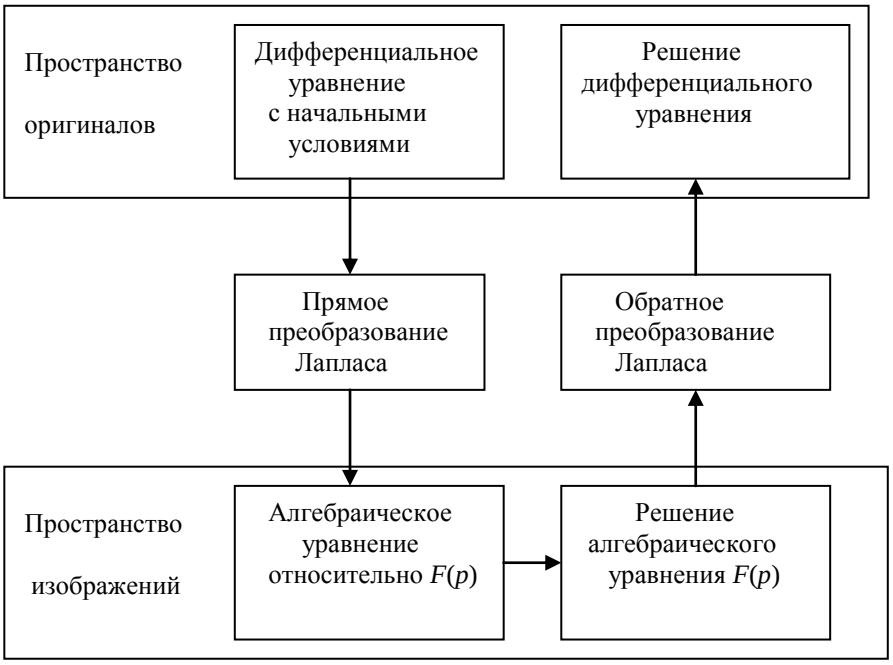
Введем обозначения $A(p)$ и $B(p)$:

$A(p) \cdot F(p) = R(p) + B(p)$ – операторное уравнение (алгебраическое относительно $F(p)$).

3). Решаем операторное уравнение: $F(p) = \dfrac{R(p) + B(p)}{A(p)}$.

4). По изображению $F(p)$ находим $y = \varphi(t)$ – частное решение уравнения (1).

Эту схему решения дифференциального уравнения можно показать в виде блок-схемы:



Пример 27. Найти частное решение уравнения $y''-2y'+2y=e^t$ при нулевых начальных условиях.

Решение:

1). Пусть $y \div F(p),$ тогда

$y' \div pF(p),$

$y'' \div p^2F(p),$

$e^t \div \frac{1}{p-1}.$

2). Подставив эти изображения в уравнение, получим:

$p^2F(p)-2pF(p)+2F(p)=\frac{1}{p-1}$ – операторное уравнение.

3). Решаем операторное уравнение:

$$F(p)(p^2-2p+2)=\frac{1}{p-1}$$

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p^2-2p+2)}.$$

4). Находим оригинал для данного изображения:

$$F(p)=\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Применив теорему произведения изображений т теорему сдвига изображений, получим:

$$f(t)=e^t * e^t \cdot \sin t.$$

Определим свертку функций:

$$e^t * e^t \cdot \sin t=\int_0^t e^u \cdot e^{t-u}\sin(t-u)du = e^t\int_0^t \sin(t-u)du = e^t\cos(t-u)\Big|_0^t =$$

$$= e^t(\cos 0-\cos t)=e^t(1-\cos t)=2\sin^2\frac{t}{2}\cdot e^t.$$

Итак: $f(t)=2\sin^2\frac{t}{2}\cdot e^t$ есть частное решение данного дифференциального уравнения.

Пример 28. Решить уравнение $y''+y+\sin 2t=0$ при $y(\pi)=1;\ y'(\pi)=1.$

Решение: При переходе к операторному уравнению возникает трудность, заключающаяся в том, что в изображение y'' будут входить начальные условия искомой функции и ее производной не в точке $t=\pi$, а в точке $t=0.$ Чтобы обойти эти затруднения, применим следующий прием:

Будем считать, что решение данного уравнения есть функция с запаздыванием на $\pi.$ Поэтому найдем решение $y(\tau)$ до включения функции с запаздыванием, а затем полученное решение сдвинем на π вправо.

Тогда $y(0)=y(\pi)=1$

$y'(0)=y'(\pi)=1$

1). Пусть $y \div F(p).$

Тогда $y'' \div p^2F(p)-py(0)-y'(0)=p^2f(p)-p-1.$

$\sin 2t \div \frac{2}{p^2+4}.$

2). Составляем операторное уравнение:

$$p^2F(p)-p-1+F(p)+\frac{2}{p^2+4}=0$$

3). Решаем операторное уравнение:

$$F(p)(p^2+1)=p+1-\frac{2}{p^2+4}$$

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}-\frac{2}{(p^2+1)(p^2+4)}$$

4). Находим оригинал $y=f(t)$ по данному изображению. Для упрощения решения последнюю дробь разложим на простейшие:

$$\frac{2}{(p^2+1)(p^2+4)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}$$

$$2=(Ap+B)(p^2+4)+(Cp+D)(p^2+1)$$

$$2=p^3(A+C)+p^2(B+D)+p(4A+C)+(4B+D)$$

Сравнивая коэффициенты, получим:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 4A+C=0 \\ 4B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\frac{2}{3} \\ C=0 \\ D=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Итак: $\frac{2}{(p^2+1)(p^2+4)}=\frac{2}{3(p^2+1)}-\frac{2}{3(p^2+4)}$

Отсюда: $F(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}-\frac{2}{3(p^2+1)}+\frac{2}{3(p^2+4)}=$

$$=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{3(p^2+1)}+\frac{2}{3(p^2+4)}$$

Значит $f(\tau)=\cos\tau+\frac{1}{3}\sin\tau+\frac{1}{3}\sin 2\tau.$

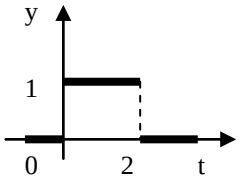
Произведя сдвиг на π вправо, получим:

$$f(t)=\cos(t-\pi)+\frac{1}{3}\sin(t-\pi)+\frac{1}{3}\sin(2t-2\pi)=-\cos t-\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{3}\sin 2t.$$

Ответ: $f(t)=-\cos t-\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{3}\sin 2t.$

Пример 29. Найти при $t > 0$ решение уравнения $y'+y=\begin{cases}1, & \text{если } 0<t<2\\ 0, & \text{если } t>2\end{cases}$ при нулевом начальном условии.

Решение: График правой части уравнения есть ступенька.



Поэтому изображение этой функции будет равно $\Phi(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p}$ (смотри решение примера №7). Операторное уравнение имеет вид:

$$pF(p)+F(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p}$$

Отсюда: $F(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p(p+1)}.$

По полученному изображению найдем оригинал:

$$F(p)=\frac{1}{p(p+1)}-\frac{1}{p(p+1)}e^{-2p}.$$

Разложим $\frac{1}{p(p+1)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{p(p+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}$$

$$1 = A(p+1) + Bp$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Следовательно: $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \div 1 - e^{-t}$

$$\frac{1}{p(p+1)} e^{-2p} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) e^{-2p} \div 1 - e^{-(t-2)}$$

(Применили теорему сдвига оригинала при $t > 2$).

Итак: $f(t) = (1-e^{-t}) - (1-e^{-(t-2)})\eta(t-2) = \begin{cases} 1-e^{-t}, & \text{если } 0<t<2 \\ -e^{-t}+e^{-(t-2)}, & \text{если } t>2 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} 1-e^{-t} & \text{при } 0<t<2 \\ e^{-t}(e^2-1) & \text{при } t>2. \end{cases}$$

Ответ: $f(t) = \begin{cases} 1-e^{-t} & \text{при } 0<t<2 \\ e^{-t}(e^2-1) & \text{при } t>2. \end{cases}$

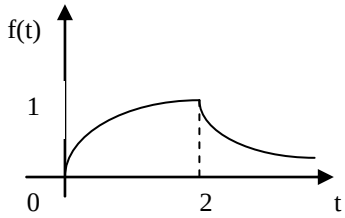


График этой функции – непрерывная кривая, имеющая угловую точку при $t = 2$.

Замечание: Указанный выше метод можно также применить к определению общего решения дифференциального уравнения.

Пример 30. Найти общее решение уравнения $y' + y = 0.$

Решение:

1). $y' \div pF(p) - y(0).$

2). $pF(p) - y(0) + F(p) = 0$

3). $F(p) = \frac{y(0)}{p+1} = \frac{C}{p+1}.$

4). $\frac{C}{p+1} \div C \cdot e^{-t}.$

Ответ: $y = C \cdot e^{-t}$ – общее решение данного уравнения.

2. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Применение операторного метода к одному дифференциальному уравнению приводит к линейному алгебраическому уравнению относительно изображения искомой функции. Используя этот метод для решения системы таких уравнений, мы сведем ее решение к решению системы алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций.

Пример 31. Решить систему $\begin{cases} y' = 3z - y \\ z' = y + z + e^t \end{cases}$, если $\begin{matrix} z(0)=0, \\ y(0)=0. \end{matrix}$

Решение:

1). Пусть $y(t) \div F(p)$

$z(t) \div \Phi(p).$

Тогда $y'(t) \div pF(p)$

$z'(t) \div p\Phi(p)$

$$e^t \div \frac{1}{p-1}.$$

2). Переходим в пространство изображений.

$$\begin{cases} pF(p)=3\Phi(p)-F(p) \\ p\Phi(p)=F(p)+\Phi(p)+\dfrac{1}{p-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(p)(p+1)-3\Phi(p)=0 \\ -F(p)+\Phi(p)(p-1)=\dfrac{1}{p-1} \end{cases}$$

3). Решаем систему операторных уравнений по правилу Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+1 & -3 \\ -1 & p-1 \end{vmatrix}=p^2-4$$

$$\Delta F=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ \dfrac{1}{p-1} & p-1 \end{vmatrix}=\frac{3}{p-1}$$

$$\Delta\Phi=\begin{vmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & \dfrac{1}{p-1} \end{vmatrix}=\frac{p+1}{p-1}.$$

Отсюда: $F(p)=\dfrac{3}{(p-1)(p^2-4)}$

$$\Phi(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p^2-4)}.$$

4). Для полученных изображений находим оригиналы.

$F(p)=\dfrac{3}{(p-1)(p-2)(p+2)}$; $\Phi(p)=\dfrac{p+1}{(p-1)(p-2)(p+2)}$.

Используем вторую теорему разложения Хевисайда.

$p_1=1;\quad p_2=2;\quad p_3=-2$ – простые полюса.

$F_1(p) = 3$	$\overline{F_1}(p)=p+1$	$\overline{F_2}(p)=3p^2-2p-4$
$F_1(1)=3$	$\overline{F_1}(1)=2$	$\overline{F_2}(1)=-3$
$F_1(2)=3$	$\overline{F_1}(2)=3$	$\overline{F_2}(2)=4$
$F_1(-2)=3$	$\overline{F_1}(-2)=-1$	$\overline{F_2}(-2)=12$

Так как $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_kt}$ и $\varphi(t)=\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{\overline{F_1}(p_k)}{\overline{F_2}(p_k)}e^{p_kt}$, то

$$y=f(t)=-e^t+\frac{3}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}$$

$$z=\varphi(t)=-\frac{2}{3}e^t+\frac{3}{4}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-2t}.$$

Таким образом мы получили частное решение данной системы.

Таблица . Оригиналы и их изображения.

Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{\omega\cos\varphi+(p-a)\sin\varphi}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos(\omega t+\varphi)$	$\frac{(p-a)\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{(p-a)^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\,sh\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
$t\,ch\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.Т.2. М., Наука. Любой год издания.
2. Диткин В.А. Прудников А.П. Операционное исчисление. М., Высшая школа. 1966г.
3. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для втузов. М., Высшая школа. 1970г.
4. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., Наука. 1968г.
5. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. М., Высшая школа. 1968г.
6. Шелковников Ф.А., Такайшвили Л.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. М., Высшая школа. 1968г.