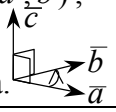
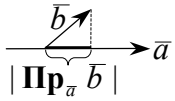
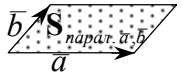
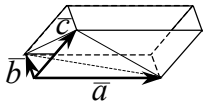
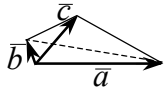
Скалярное, векторное смешанное произведения векторов. Геометрические приложения.

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные орты (образуют ортонормированный базис);

$\bar{a} = x_a\bar{i} + y_a\bar{j} + z_a\bar{k} = (x_a, y_a, z_a)$; $\bar{b} = x_b\bar{i} + y_b\bar{j} + z_b\bar{k} = (x_b, y_b, z_b)$; $\bar{c} = x_c\bar{i} + y_c\bar{j} + z_c\bar{k} = (x_c, y_c, z_c)$;

	Скалярное произведение	Векторное произведение	Смешанное произведение
Обозначения	$\bar{a}\cdot\bar{b} = (\bar{a},\bar{b})$	$\bar{a}\times\bar{b} = [\bar{a},\bar{b}]$	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = (\bar{a},\bar{b},\bar{c})$
Определение	$(\bar{a},\bar{b}) = \lvert\bar{a}\rvert\,\lvert\bar{b}\rvert\cos(\hat{\bar{a};\bar{b}})$ – число.	$\bar{c} \overset{\Delta}{=} [\bar{a},\bar{b}]$ – вектор: 1. $\lvert\bar{c}\rvert = \lvert[\bar{a},\bar{b}]\rvert = \lvert\bar{a}\rvert\,\lvert\bar{b}\rvert\sin(\hat{\bar{a};\bar{b}})$; 2. $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$; 3. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – правая тройка. 	$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]) = ([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})$ – число.
Координатная запись	$(\bar{a},\bar{b}) = x_ax_b + y_ay_b + z_az_b$	$[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$	$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$
Алгебраические свойства	1. $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$ 2. $(\lambda\cdot\bar{a},\bar{b}) = \lambda\cdot(\bar{a},\bar{b})$ 3. $(\bar{a},\bar{b}_1+\bar{b}_2) = (\bar{a},\bar{b}_1)+(\bar{a},\bar{b}_2)$	1. $[\bar{a},\bar{b}] = -[\bar{b},\bar{a}]$ 2. $[\lambda\cdot\bar{a},\bar{b}] = \lambda\cdot[\bar{a},\bar{b}]$ 3. $[\bar{a},\bar{b}_1+\bar{b}_2] = [\bar{a},\bar{b}_1]+[\bar{a},\bar{b}_2]$	*Смотри определение смешанного произведения и алгебраические свойства скалярного и векторного произведений.* Например, из определения смешанного произведения и св.1 скалярного, св.1 векторного произведений следует: $(a,b,c) = (b,c,a) = (c,a,b) =$ $-(a,c,b) = -(b,a,c) = -(c,b,a)$
Геометрические приложения	1. Ортогональность векторов: $(\bar{a},\bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a}\perp\bar{b}$ 2. Угол между векторами: $\cos(\hat{\bar{a};\bar{b}}) = \dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{\lvert\bar{a}\rvert\,\lvert\bar{b}\rvert}$ 3. Проекция вектора на вектор: $\mathbf{Пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = \dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{\lvert\bar{a}\rvert} = \lvert\bar{b}\rvert\cos(\hat{\bar{a};\bar{b}})$  4. Длина вектора: $\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})} = \sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}$ 5. Единичный вектор: $\bar{a}^0 = \dfrac{\bar{a}}{\lvert\bar{a}\rvert} = \left(\dfrac{x_a}{\lvert\bar{a}\rvert}, \dfrac{y_a}{\lvert\bar{a}\rvert}, \dfrac{z_a}{\lvert\bar{a}\rvert}\right)$	1. Колинеарность векторов: $[\bar{a},\bar{b}] = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}\parallel\bar{b}$ 2. Угол между векторами: $\sin(\hat{\bar{a};\bar{b}}) = \dfrac{\lvert[\bar{a},\bar{b}]\rvert}{\lvert\bar{a}\rvert\,\lvert\bar{b}\rvert}$ 3. Площадь параллелограмма: $\mathbf{S}_{парал.\bar{a},\bar{b}} = \lvert[\bar{a},\bar{b}]\rvert$  *параллелограмм*	1. Компланарность векторов: $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a},\bar{b},\bar{c}$ - компланарны; 2. Объем параллелепипеда: $\mathbf{V}_{пар.\bar{a},\bar{b},\bar{c}} = 6\mathbf{V}_{тетр.\bar{a},\bar{b},\bar{c}} = \lvert(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\rvert$  *параллелепипед*  *тетраэдр*